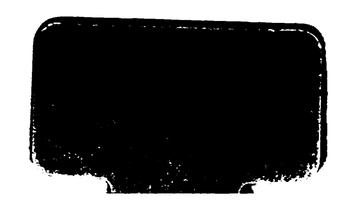
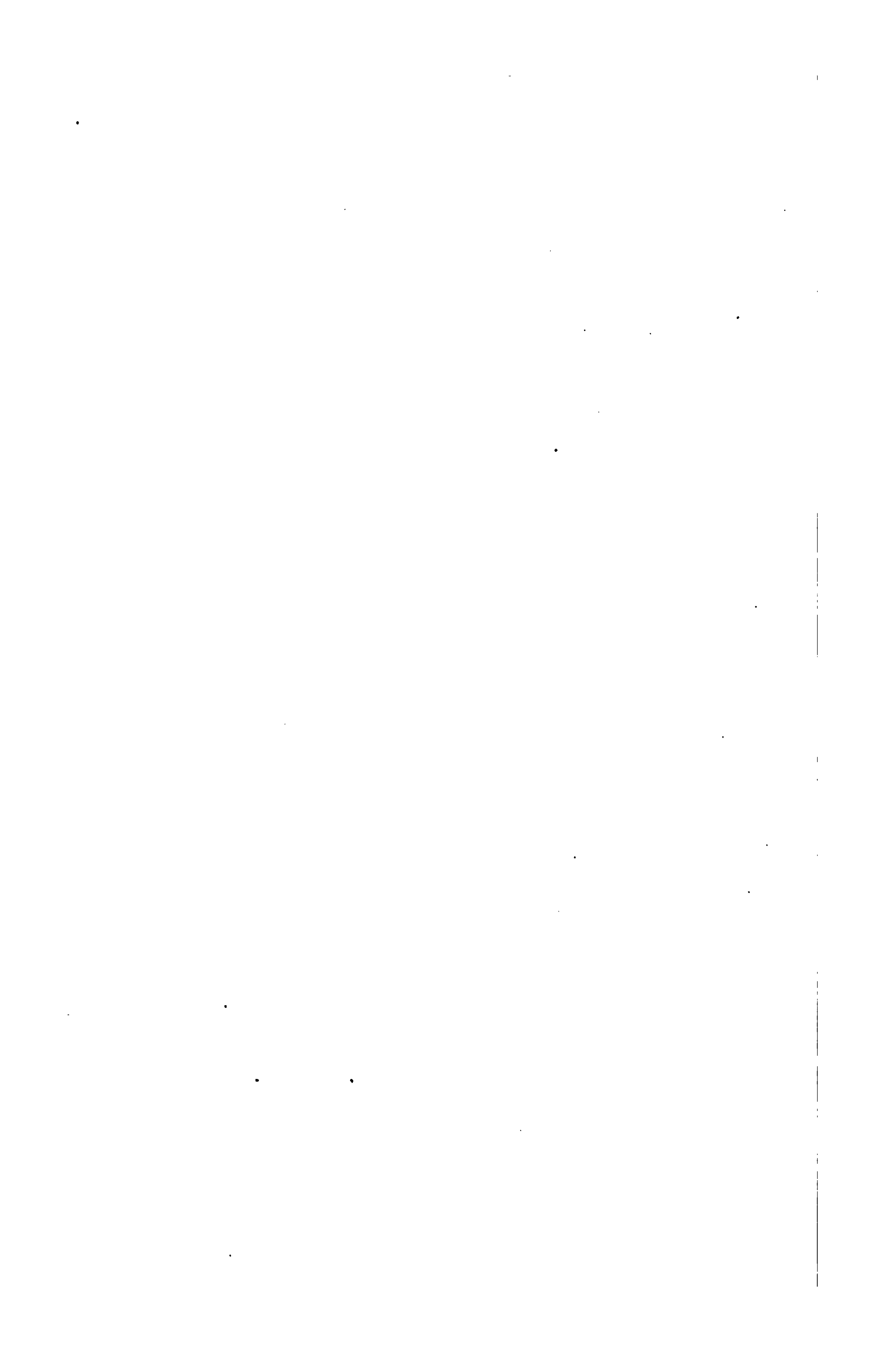

HARVARD
COLLEGE
LIBRARY.





Die Methode

des

mathematischen Unterrichts.

Nebst Proben
einer schulmäßigen Behandlung der Geometrie.

Von

Theodor Wittstein,
Dr. phil. und Professor.

Hannover.
Hahn'sche Buchhandlung.
1879.

Druck von Wilh. Riemschneider. Hannover.

Vorrede.

Die nachstehend gegebenen drei Artikel über die Methode des mathematischen Unterrichts haben den Zweck, einen Beitrag zu liefern zur Erörterung der Frage, wie der Unterricht in der Mathematik nach Maßgabe der Forderungen der heutigen Pädagogik zu ertheilen, beziehungsweise in wie weit er zu reformiren sei. Diese Artikel sind zuerst abgedruckt erschienen in Mager's pädagogischer Revue. Da jedoch diese Zeitschrift, wie es scheint, gegenwärtig vergriffen ist, so bin ich dem von mehreren Seiten mir ausgesprochenen Wunsche, einen besonderen Abdruck der bezeichneten Artikel zu veranstalten, um so bereitwilliger nachgekommen, als ich Grund habe zu glauben, daß dasjenige, was darin gesagt worden ist, eben sowohl und unverändert noch heute gesagt werden kann. Zum wenigsten in unsern preußischen Schulen, in denen man Aufgabensammlungen wie Bardey und den durch Bertram verwässerten Meier Hirsch zum Grunde legt, scheint die Mathematik ferner als jemals von einer Wissenschaft zu sein, und in welcher mustergültigen Weise Gauß in seinen Vorlesungen die Mathematik behandelte*), das ist der gegenwärtigen Generation schon wieder entfallen.

Zugleich erhalte ich hiermit auch die mir sehr erwünschte Gelegenheit, einem größeren Publicum von denjenigen Grundsätzen Rechenschaft zu geben, aus welchen mein seit dem ersten Abdrucke dieser Artikel erschienenes und in mehreren Auflagen verbreitetes Lehrbuch der Elementar-Mathematik hervorgewachsen

---

*) Man sehe des Verf. Gedächtnißrede auf Carl Friedrich Gauß. Hannover 1877. Seite 18.

ist. Denn da in diesem Lehrbuche, nach der Natur der Sache, von der Methode des Unterrichts so gut wie gar nicht die Rede sein konnte, so wird man an vorliegender Stelle Manches aufgeklärt finden, was dort etwa der Aufklärung bedürftig scheinen möchte.

Der Text der drei Artikel erscheint hier beinahe unverändert wie früher, nämlich nur mit Unterdrückung von ein paar Kleinigkeiten, welche auf Zeit und Ort der ersten Publication Bezug hatten und heute kein Interesse mehr haben können. Sollte dennoch Einiges stehen geblieben sein, was die Erinnerung an die erste Publication wach ruft, so wolle man dies damit entschuldigen, daß ich bemüht gewesen bin dem Ganzen den ihm innewohnenden Charakter von ursprünglicher Frische und Lebendigkeit, in soweit dieser vorhanden ist, nach Möglichkeit zu bewahren.

So möge denn die Schrift auch heute noch ihre Kraft erproben und hie oder da ein einstimmendes Gemüth wecken.

Die Methode des mathematischen Unterrichts.

Erster Artikel.

Was die Mathematik auf Schulen solle, darüber pflegt man heutiges Tages keinen Nachweis mehr zu verlangen. Unsere Zeit hat die Forderung einmal ausgesprochen, und wer auf den Namen eines Gebildeten Anspruch machen will, der soll diesen wichtigsten Hebel der Naturwissenschaften, welcher um dieser seiner Anwendungen willen immer weiter in das tägliche Leben hineingreift, — wenn auch nicht gerade selbst anzulegen verstehen, so doch wenigstens von seiner Anwendbarkeit einen allgemeinen Begriff besitzen, statt beim Anblicke der mathematischen Hieroglyphen in jenes „dumme Staunen" zu gerathen, welches der Würde des Menschen so wenig ziemt. Ja sie hat diese Forderung mit einer solchen Bestimmtheit ausgesprochen, daß sie sogar unter dem Namen der Elementar-Mathematik entschieden, wenn gleich nicht ohne einiges Schwanken in den Grenzbestimmungen, dasjenige Gebiet aus der gesammten Mathematik heraushebt, dessen Studium dem Gebildeten unserer Tage nicht mehr erlassen werden kann. Zu diesem Studium ihre Schüler anzuleiten, ist eine von den Aufgaben, welche unsere Schulen zu lösen haben.

Wirft man nun aber einen Blick in das Leben hinein, so muß man sichs freilich gestehen, daß von einem mathematischen Wissen bei unseren Gebildeten zur Zeit noch äußerst wenig anzutreffen ist, so dringend auch die Forderung immer mehr an

sie herantritt. Eine Erfahrung, die jeder machen kann, möge statt vieler zum Belege dienen. Wo in einem Kreise Erwachsener die Rede kommt auf Fragen historischer, philologischer, theologischer, juristischer, medicinischer und selbst philosophischer Untersuchungen, da ist es immer die Mehrzahl, die ein Wort mitzureden wenigstens versucht; denn selbst wer völlig außerhalb der Sache steht, hat schon aus allgemeinem Interesse einmal um die Sache sich bekümmert und sich irgend einen allgemeinen Begriff davon anzueignen gewußt. Kommt aber zufällig ein Gegenstand der Mathematik zur Sprache, und wäre es auch nur der geringste mathematische Begriff, so wissen die meisten nichts hervorzubringen, ausgenommen etwa eine naive Erklärung ihres Respects vor einer Wissenschaft, von welcher nichts zu verstehen übrigens ganz in der Ordnung sei; oder, falls der Mangel tiefer empfunden wird, eine Anklage ihrer Lehrer, bei denen sie nichts haben lernen können. Der Leser wird mir zugestehen, daß ich nicht übertreibe. Aber ist das ein richtiges Verhältniß?*) Sollten dergleichen Erfahrungen nicht vielmehr zu einer ernsten Untersuchung der Frage führen, woher es doch komme, daß ein für jedermann so zugängiges Wissen wie das mathematische bisher nur das Eigenthum einiger Auserwählten geworden ist? Mögen die Schuleinrichtungen hier außer Betracht bleiben, die vielleicht einen Theil der Schuld tragen: wie die Schulen, und insbesondere die Gymnasien (gelehrte, wie Realschulen), denen unsere Zeit diese Aufgabe vorzugsweise auferlegt, die Mathematik als Unterrichtsgegenstand richtig zu ergreifen und angemessen zu behandeln haben,

*) Zwar wer wie Jules Janin meint: „Man kann über Alles schreiben — wie viel mehr also nicht sprechen? — ohne eigentliche Sachkenntniß zu besitzen, außer über die Mathematik," der wird auch jene Erscheinung ohne Mühe sich zu erklären wissen. Indessen wer sähe nicht, daß in dieser Stellung der Mathematik als einer Ausnahme wieder das ganze Problem versteckt liegt?

darüber muß zuerst und vor allen Dingen der unterrichtende Mathematiker sich ein klares und vollständiges Bewußtsein gebildet haben, wenn nicht die neue Generation abermals verkümmern und, nach gereifter Einsicht, Schule und Lehrer verdammen soll. Das Nachstehende möchte dazu als Beitrag gelten!

Man hat eine Auffassung des Gymnasialunterrichts geltend zu machen gesucht, nach welcher man einen einzelnen Lehrgegenstand dergestalt glaubt herausheben und an die Spitze des Unterrichts stellen zu können, daß alle übrigen Lehrfächer nur insofern, als sie zu diesem einen ihren Beitrag liefern, und nur in demjenigen Grade, in welchem sie ihren Beitrag dazu liefern, in den Kreis des Gymnasialunterrichts aufgenommen werden sollen. Zu diesem Einen die Mathematik zu erwählen, wird zwar nicht leicht jemandem einfallen, da die Ungereimtheit der Consequenzen zu sehr auf der flachen Hand liegt. Sei aber auch dieses Eine der Sprachunterricht — der altclassische oder der deutsche — oder sei es die Religion, oder was man sonst noch könnte mit einigem Grunde in Vorschlag bringen: so hat man damit allerdings ein recht concretes, so zu sagen handgreifliches Princip dem Unterrichte aufgedrückt; aber übel sieht es aus um die Berechtigung der einzelnen Lehrfächer. In sprachlicher Rücksicht würde (um es möglichst kurz auszusprechen) die größere oder geringere Vielseitigkeit in dem Vorkommen der Sprachelemente und ihrer Verknüpfungen zu den Kategorien des Denkens, in religiöser Rücksicht dagegen das größere oder geringere Geltendmachen des menschlichen Abhängigkeitsgefühls und der daraus resultirenden Hinweisung auf Gott, das Kriterium für die größere oder geringere Zulassungsfähigkeit der Gymnasialfächer auszumachen haben; und in beiderlei Rücksicht würde der Mathematik, um nur bei dieser stehen zu bleiben, jedenfalls nur ein sehr untergeordneter Platz, wenn überhaupt ein solcher,

zuerkannt werden müssen, da ihre Armuth an Elementen zu sprachlicher wie religiöser Bildung offen vorliegt. Aus diesem Grunde haben denn auch alle Vertheidiger einer solchen Auffassung für die Mathematik kaum mehr als Trivialitäten vorzubringen vermocht. Wollte man die Forderung dahin beschränken, daß der mathematische Unterricht so viel wie möglich für die Zwecke der religiösen oder der sprachlichen Bildung benutzt werden solle, so würde das Sinn haben; denn solche Gegenseitigkeit, in den richtigen Grenzen gehalten, sind alle Unterrichtsfächer einander schuldig. Aber damit würde die vermeintliche Einheit des Gymnasialunterrichts wieder vollständig auseinander fallen, also diese Einheit vielmehr auf einer ganz andern Stelle gesucht werden müssen. Und in der That, wer in der religiösen Bildung einen Spitzpunkt unseres Gymnasialunterrichts anerkennt, der hat Recht; wer aber in der sprachlichen Bildung einen solchen anerkennt, der hat nicht minder Recht; der Unterricht hat eben so viele für sich bestehende Spitzen wie Lehrfächer da sind, und weder die religiöse Bildung allein, noch die sprachliche Bildung allein, noch was man sonst dafür setzen möge, machen den Zielpunkt des Gymnasialunterrichts oder irgend eines andern Schulunterrichts aus, sondern in der Gesammtbildung des Menschen, welche jene Partialbildungen als integrirende Theile in sich enthält, liegt der ideelle Zielpunkt eines jeden Unterrichts ausgesprochen. Man kann ferner diese Gesammtbildung definiren als eine solche, die den heranwachsenden Menschen befähigen soll, ohne Rücksicht auf den von ihm zu erwählenden Beruf — die Gegenwart, in die er eintreten wird, zu begreifen und sich in derselben zurecht zu finden und geistig heimisch zu machen. Was zu ihr gehöre, das steht eben deshalb nicht ein für allemal fest. Es ist einerseits der Mode unterworfen, und demnach ein Anderes in anderen Jahrhunderten; es ist andererseits ver-

schieden auf den verschiedenen Stufen der menschlichen Gesellschaft, und zerfällt in dieser letzteren Rücksicht für unsere gegenwärtigen Civilisationszustände in die Volksbildung, die (höhere) bürgerliche Bildung und die gelehrte Bildung. Auch kann nicht alles, was zur Bildung eines gegebenen Individuums in einer gegebenen Zeit gehört, in den Kreis des Schulunterrichts hineingezogen werden, weil gewissen Bildungs-Requisiten das educatorische Element fehlt oder so gut wie fehlt, und die Erlangung anderer dem reiferen Manne überlassen bleiben muß; womit man den bekannten Satz vergleichen mag, daß die Bildung des Individuums niemals geschlossen, sondern eben ein Ideal ist, dem die Wirklichkeit nur asymptotisch näher kommen kann. Wenn man nun aber auch, von dieser Seite angesehen, das Zugeständniß machen muß, daß Religion und Sprache des Vorzugs genießen, daß sie zu allen Zeiten und unter allen Verhältnissen, wo überhaupt noch von Bildung die Rede sein kann, als wesentliche Elemente der Bildung werden gelten müssen, so bleibt darum für eine bestimmt gegebene Zeit nicht minder diejenige besondere Art von Bildung der Gesammtbildung wesentlich, welche diese Zeit selbst als unabweisbar fordert. In solchem Falle befinden wir uns aber gegenwärtig, wie schon im Eingange angedeutet worden, mit der Mathematik, wenigstens sobald als der Standpunkt der Volksbildung überschritten werden soll; und da obendrein die Mathematik ganz vorzüglich derjenigen Behandlungsweise unterworfen zu werden sich eignet, welche der erziehende Unterricht verlangt, so hat sie mithin ein Recht, selbständig als Unterrichtsfach der Gymnasien aufzutreten und jeden Maßstab für ihre Berechtigung, hergenommen aus den etwaigen Beiträgen, welche sie zur sprachlichen oder zur religiösen Bildung liefern mag, von sich abzuweisen. Sie hat demnach ferner auch ein Recht, sich spröde zu verhalten gegen jedes von außen sich herbeidrängende Princip, welches ihr etwa

Lehrgang und Lehrziel vorzeichnen möchte; Beides, Gang und Ziel des mathematischen Unterrichts, muß lediglich aus dem Begriffe der mathematischen Bildung seiner Bestimmung entgegensehen, — und dies war es, was ich hier habe anzeigen wollen.

Nach Abweisung dieses Irrweges, wo zur Regulirung des mathematischen Unterrichts ein fremdes Princip von außen herbeigeholt wird, — eines Weges, den freilich ein Mathematiker schwerlich im Ernste sich entschließen wird zu gehen, — bleibt demnach jetzt die Frage, welche Art des mathematischen Unterrichts aus dem Begriffe der mathematischen Bildung selbst resultire. Damit betrete ich aber sogleich wieder ein streitiges Gebiet; denn es ist der Streit zwischen Synthesis und Genesis, welcher hier zur Sprache kommen muß, ein Streit, in welchem ich schon öfter Theil nehmend habe auftreten müssen. Diesen Streit hier einmal im Zusammenhange zu besprechen, ist meine Absicht. Da aber häufig genug der concrete Fall viel besser als alle abstracten Deductionen geeignet ist, die wahre Beschaffenheit einer Sache ins rechte Licht zu stellen, und da obendrein die ächte Genesis in den betreffenden Lehrbüchern sich noch so wenig beachtet findet, so ziehe ich es vor statt vieler Worte zugleich auch die Sache selbst reden zu lassen, indem ich in einem zweiten Artikel Proben einer schulmäßigen Behandlung der Geometrie zur Kritik vorzulegen gedenke. Diesem schicke ich demnach den gegenwärtigen ersten Artikel gleichsam als Einleitung voraus.

Offenbar muß der Begriff der mathematischen Bildung, so wie ich ihn hier als maßgebend für die Einrichtung des mathematischen Unterrichts hingestellt habe, unterschieden werden von demjenigen der mathematischen Gelehrsamkeit. Die Schule soll keine Mathematiker bilden, so wenig wie Philologen oder Theologen. Sie soll zwar die Möglichkeit offen lassen, daß ein Theil ihrer Schüler sich späterhin dem Studium der Mathematik in vollem

Umfange zuwendet, sei es um dieselbe zur Fachwissenschaft zu machen oder um sie als Hülfswissenschaft für physikalische oder technische Studien zu benutzen; aber dieser Möglichkeit geschieht schon von selbst Genüge, wenn man die mathematische Bildung als Zielpunkt des mathematischen Unterrichtes aufstellt, und sie kann deshalb ihren Einfluß nicht mehr bis dahin erstrecken, daß um ihrer willen nun auch die sog. mathematische, d. i. synthetische Methode ausschließlich beim Unterrichte Anwendung finden solle. Dieses Letztere entscheidet sich vielmehr erst durch Untersuchung der Frage, ob die synthetische Methode auch wirklich dazu geeignet ist, mathematische Bildung hervorzubringen.

Entschieden sind ohne Zweifel alle Stimmen gegen jene roheste Weise des mathematischen Unterrichts, wo man dem Schüler die Resultate der mathematischen Forschung, d. i. die Lehrsätze, einzeln vorzählt, allenfalls — wie jener Engländer von seinem Lehrer verlangt haben soll — unter Verbürgung seines Ehrenworts für die Richtigkeit derselben, und nun die Forderung hinzufügt, daß der Schüler diese Sätze behalten solle. Solches Verfahren kann höchstens da willkommen geheißen werden, wo als die beste Unterrichtsmethode diejenige gilt, welche dem Lehrer die meisten Bequemlichkeiten bietet. Bei dem Schüler aber wird man damit nichts weiter hervorbringen als einen unsagbaren Widerwillen gegen den ganzen Unterricht und das entschiedene Bestreben, sobald der Lehrer den Rücken gewandt hat, Alles wieder von sich abzuschütteln: offenbar das gerade Gegentheil von der beabsichtigten Bildung. Man muß es unsern Mathematikern nachrühmen, daß sie von jeher gewissenhafter zu Werke gegangen sind; denn sie gaben zu jedem Satze auch den Beweis. Sieht man aber die Sache näher an, so fordert ein Beweis jederzeit schon vorangegangene Sätze, auf die er sich zu berufen hat, und daraus ergiebt sich mithin für diese Unterrichtsweise, was bei

jenem rohen Verfahren nicht der Fall war, mit Nothwendigkeit die Forderung einer bestimmten, durch die Beschaffenheit der Beweise unabänderlich bedingten Anordnung der Sätze, dergestalt, daß jeder Satz an derjenigen Stelle, die er einnimmt, vollständig aus den vorhergehenden Sätzen muß bewiesen werden können. Nimmt man hiezu noch die Forderung, daß jeder Satz zugleich auch zum Beweise irgend eines nachfolgenden Satzes nöthig sein muß, so hat man damit das Princip der synthetischen Methode, von welcher uns Euklid ein so unübertreffliches Muster hinterlassen hat.

Fragt man nun, welchen Grad von mathematischer Bildung ein Unterricht im Geiste der synthetischen Methode zu Wege zu bringen vermag, so stellen sich sogleich allerlei Bedenken ein. Ich will für den Augenblick den „Satz" selbst nicht weiter ins Auge fassen, sondern stillschweigend annehmen, daß derselbe schon an sich als ein solcher aufzutreten verstehe, um dessen Erkenntniß es sich lohne; der „Beweis" alsdann, in strenger logischer Form einherschreitend und durchaus an Bekanntes, nämlich Vorangegangenes, sich anlehnend, wird sicher schließlich zu dem Resultate führen, daß die Richtigkeit des Satzes zugestanden wird. Indessen dieser Beweis muß Schritt vor Schritt dem Schüler mitgetheilt werden; nirgends, außer in den Conclusionen aus den gegebenen Prämissen, zeigt sich eine Nothwendigkeit, weshalb gerade so und nicht anders fortgeschritten werden — weshalb gerade dieser und kein anderer Satz zu Hülfe gerufen, gerade diese und keine andere Hülfslinie gezogen werden muß; der Nachweis einer solchen Nothwendigkeit ist ja für die endliche Einsicht in die Richtigkeit des Satzes gar nicht erforderlich; und es reducirt sich mithin die ganze Selbstthätigkeit des Schülers darauf, aus der dargebotenen Propositio major und der gleichfalls dargebotenen Propositio minor die Conclusion zu ziehen: wenn man nicht etwa noch die Fähigkeit

besonders in Anschlag bringen will, einen früher schon dagewesenen Satz wieder zu erkennen. In der That eine sehr geringe Selbstthätigkeit, die, wenn sie wirklich die einzige erreichbare wäre, sofort die Mathematik, als der educatorischen Behandlung unfähig, aus unseren Schulen verbannen und es jedem Einzelnen überlassen müßte, so viel als er mag sich davon anzueignen! — Daß daneben nun auch diejenige Nothwendigkeit vermißt wird, vermöge deren der Satz gerade an dieser und keiner anderen Stelle in der Reihefolge der Sätze auftritt, liegt auf der Hand; der Schüler ist auch hier lediglich an die Mittheilung des Lehrers gewiesen; ein Grund, weshalb der Satz sich nicht schon früher, nämlich aus einer geringeren Anzahl von Vordersätzen habe beweisen lassen, oder weshalb er gar zum Beweise eines späteren Satzes unerläßlich gefordert werde, wird ihm nicht sichtbar.

Ich wähle als erläuterndes Beispiel den bekannten Satz: „Daß die Winkelsumme im Dreieck zwei Rechte beträgt“, und setze voraus, daß die Parallelentheorie vorhergegangen ist. Das Dreieck heiße ABC; die Figur wird der Leser leicht hinzufügen.

Beweis: 1) Man lege durch A eine beiderseits unbegrenzte gerade Linie DE parallel mit BC.*) — (Welche Causalverbindung von der nachzuweisenden Winkelsumme zu dieser Parallellinie führt, das bleibt hier vollkommen dunkel. Diese Linie erscheint hier nur als ein Griff ins Blaue hinein, der sich freilich am Schluß als ein glücklicher Griff bewährt.)

2) Man wende den Satz an, daß die Wechselwinkel zwischen Parallellinien gleich groß sind; welches hier zweimal möglich ist, nämlich $DAB = ABC$ und $EAC = ACB$. — (Dieser Ueber-

*) Um in der Figur nicht zu irren, beachte man die Folge der Buchstaben in DE und BC. Es ist dies ein Punkt, in welchem unsere Lehrbücher nicht sorgsam genug zu sein pflegen.

gang zu den Wechselwinkeln bleibt nicht minder dunkel. Weshalb nicht die Innenwinkel? und wie hängt das überhaupt mit der Winkelsumme zusammen?)

3) Man wende auf den Winkel BAC den Satz an, daß jede Größe sich selbst gleich ist; hier also $BAC = BAC$. — (Der Grund ergiebt sich freilich sogleich im Folgenden. Wenn man sich aber streng hütet einen Vorblick auf das Folgende zu werfen, welches in der That dem Geiste der synthetischen Methode nicht gemäß sein würde, so erscheint diese isolirte Anwendung eines Satzes, der in der vorliegenden Figur wenigstens zehnmal sich anwenden läßt, vollkommen unmotivirt.)

4) Man addire die drei gefundenen Gleichungen, wodurch man erhält $DAB + EAC + BAC = ABC + ACB + BAC$. — (Hier hat der Schüler Beschäftigung. Aber statt nun bei der Behauptung des Satzes angekommen zu sein, hat man ein ganz anderes Resultat zu Tage gefördert, nämlich eine Behauptung von der Gleichheit zweier Winkelsummen, statt daß es um die Größe einer Winkelsumme sich handelte. Wozu dieser Stationspunkt?)

5) Man wende auf die erstere jener beiden Winkelsummen den Satz an, daß die Summe der Winkel über einer geraden Linie zwei Rechte beträgt; nämlich $DAB + EAC + BAC = 2$ R. — (Dieser Satz erscheint wieder als ein Griff ins Blaue hinein, wenn man nämlich noch nicht an die folgende Conclusion denkt.)

6) Man ziehe aus den beiden gefundenen Gleichungen, als Prämissen, die Conclusion; nämlich $ABC + ACB + BAC = 2$ R. — (Hier hat der Schüler wieder Beschäftigung, und gelangt damit zum Resultate.)

An der Evidenz dieses Beweises zweifelt niemand. Die Richtigkeit des Satzes ist damit unumstößlich nachgewiesen, und so lange es nur um diese sich handelt (und das pflegt in den

mathematischen Schriften in strengem Sinne, von Fachgelehrten für Fachgelehrte bestimmt, der Fall zu sein), so lange ist die synthetische Methode vollkommen in ihrem Rechte. Aber ein ganz anderer ist der Stand der Sache im vorliegenden Falle, wo der **Unterricht** in Frage kommt. Der obige Beweis, den ich hier absichtlich in voller Strenge und mit Ausschließung aller fremdartigen Elemente synthetisch durchgeführt habe, besteht aus sechs Schritten, von denen jeder für sich völlig unmotivirt auftritt; der Schüler wird mit verbundenen Augen durch diese sechs Schritte hindurchgeführt, am Schlusse wird ihm die Binde von den Augen genommen, er sieht sich am Ziele, aber von dem zurückgelegten Wege weiß er keinerlei Rechenschaft zu geben. Soll aber nicht vielmehr dem Unterrichte die Aufgabe zufallen, dem Schüler diejenige Anleitung zu geben, vermöge deren er einen Beweis selbst zu finden in den Stand gesetzt werde? Nach dem Muster dieses Beweises, der ihn bloß blind tappen lehrt, lernt er das gewiß nicht. Ferner findet in dem obigen Beweise dreimal, nämlich in 2), 3) und 5), eine Berufung auf andere Sätze statt, und damit ist offenbar dem in Rede stehenden Satze seine systematische Stelle **hinter** diesen Sätzen angewiesen; aber da jene Berufungen nirgends motivirt worden waren, so zeigt sich auch keine innere Nothwendigkeit für diese Stellung des Satzes, sondern es bleibt noch immer die Möglichkeit offen, daß der Beweis vielleicht auch aus anderen, entweder mehr oder weniger Prämissen geführt werden könne. Dies ist nun im allgemeinen wirklich der Fall; nur erfährt der Schüler nichts davon, da im Gegentheil der Beweis mit der Autorität eines Orakelspruchs sich ihm aufdrängt, und damit geht ihm dann ein zweites höchst wichtiges Bildungselement verloren, nämlich die vollendete geistige Beweglichkeit innerhalb der Sphäre der mathematischen Begriffe und die daraus resultirende selbstthätige Beherrschung des Stoffes.

Nun kann man zwar wohl als zugestanden annehmen, daß nicht leicht irgendwo ein Lehrer in aller Strenge bei seinem Unterrichte der synthetischen Methode folgen wird, so wie dieselbe oben in einem Beispiele dargestellt worden ist; die Natur der sich herbeidrängenden Forderungen bricht sich, vielleicht trotz dem Lehrer, mehr oder weniger Bahn; es werden Vorblicke auf das zu erzielende Resultat geworfen, um daraus Fingerzeige für den Fortgang des Beweises zu gewinnen: und dieses führt mich denn von selbst zur Erörterung derjenigen Ergänzung, welche zu der synthetischen Methode hinzutreten muß, wenn die vorhin gerügten Uebelstände vollständig, oder doch beinahe vollständig verschwinden sollen. Ich bleibe dabei noch immer bei der oben gemachten Voraussetzung stehen, daß der Inhalt des Satzes vorläufig nicht weiter ins Auge gefaßt werden soll, vielmehr der Satz als ein solcher, um dessen Erkenntniß es sich lohne, von selbst schon werde sich geltend zu machen wissen. Soll nun der Beweis auf jedem seiner Schritte als motivirt erscheinen, so kann die Motivirung nur aus dem Satze selbst, welcher hier als der Motivirung nicht weiter bedürftig angenommen wird, herfließen, und damit ergiebt sich, wie bekannt, die Analysis des Lehrsatzes als die gesuchte einer jeden Synthesis beizufügende d. i. voraufzuschickende nothwendige Ergänzung. Es muß also die Behauptung des gegebenen Satzes vorläufig als eine bloße Möglichkeit, als eine Hypothese angesehen, und untersucht werden, unter welcher Voraussetzung diese Behauptung nur werde bestehen können; es muß weiter untersucht werden, unter welcher Voraussetzung wieder diese Voraussetzung nur bestehen könne, u. s. f., bis man durch diesen Regressus entweder bei bekannten schon dagewesenen Thatsachen oder, falls man damit sich nicht beruhigen will, bei den Axiomen und Postulaten der Wissenschaft selbst anlangt. Daraus kann sodann erst rückwärts diejenige Reihe von Syllogismen

zusammengestellt werden, welche die Synthesis ausmacht; sämmtliche Prämissen dieser Syllogismen erscheinen jetzt durch die vorausgegangene Analysis als vollständig motivirt.

Man kann nicht in Abrede stellen, daß die Aufgabe der Analysis, so wie sie hier ausgesprochen worden ist, insofern noch etwas Unbestimmtes in sich trägt, als es nicht nur der Voraussetzungen zu irgend einer Behauptung — sei diese nun die Behauptung des Satzes selbst, oder eine ihr schon als Voraussetzung untergelegte Behauptung — möglicher Weise mehrere geben könnte, zwischen denen mithin die Wahl zweifelhaft bliebe, sondern auch indem hier gar keine Wegweisung zur Aufsuchung dieser Voraussetzungen sich ergeben hat, also scheinbar wieder nur ein Greifen ins Blaue hinein übrig bleibt, welches eben vermieden werden sollte. Was das Erstere betrifft, so wird offenbar jede Mehrheit von Voraussetzungen zu einer und derselben Behauptung, zwischen denen die Wahl schwankend bleibt, eine Zerspaltung der Analysis in einer Mehrheit von Analysen, und folglich auch rückwärts wieder eine Mehrheit von synthetischen Beweisen eines und desselben Satzes zur Folge haben, und daß dieser Fall in der Mathematik häufig vorkommt, ist bekannt genug. Man erinnere sich nur der zahlreichen Beweise des Pythagoreischen Lehrsatzes oder des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte. Solcher Zerspaltungen der Analysis können natürlich in einer und derselben Untersuchung verschiedene nach einander eintreten, und der Gang der Analysis ist demnach nichts weniger als der Fortbewegung in einem geschlossenen Kanale vergleichbar, dessen Endpunkt durch seinen Anfangspunkt unabänderlich gegeben ist, sondern vielmehr in einem freien Strome, von dessen Mündung man durch verschiedene Flüsse und verschiedene Bäche bis zu den Quellen hinaufsteigen kann, dergestalt daß von jeder dieser letzteren wieder eine eigene Synthesis (d. i. ein eigener Beweis) zu der Mündung

zurückführt. Dieses Gleichniß läßt noch so weit sich verfolgen, daß man darin sogar den Bifurcationen einen Platz anweisen könnte; aller Quellen gemeinsamer Ursprung aber deutet schließlich auf den atmosphärischen Wassergehalt, als das gemeinsame Princip für alle.

Was ferner den zweiten Punkt anlangt, so hat man die Angabe derjenigen Hülfsmittel, welche der Aufsuchung der Voraussetzungen zu einer vorliegenden Behauptung zur Wegweisung dienen müssen, in der betreffenden Wissenschaft jederzeit selbst zu suchen. In der That sind diese Hülfsmittel in der Arithmetik sehr reichhaltig gegeben, und zwar nicht nur für die Analysis der Aufgabe, sondern auch, wovon hier zunächst die Rede ist, für die Analysis des Lehrsatzes (die von jener sich nur in der äußern Form unterscheidet); so reichhaltig, daß sogar der Name „Analysis" für die Arithmetik selbst oder wenigstens für einen beträchtlichen Theil derselben usurpirt worden ist. Alle Lehrsätze der Arithmetik werden in der Form von Gleichungen ausgesprochen oder lassen sich wenigstens auf solche zurückführen; diejenigen Syllogismen, aus denen ein Beweis sich zusammenzusetzen hat, reduciren sich auf ein Rechnen mit Gleichungen und demnach bietet sich die Theorie der Gleichungen als diejenige Fundgrube dar, aus welcher die arithmetische Analysis ihre Hebel herbeizuholen hat. In der Geometrie — sowie in der Mechanik, die hierin mit der Geometrie Schritt hält — steht der Analysis kein so ausgedehntes Hülfsmaterial zu Gebote; die Alten haben zwar den Anfang dazu gemacht (z. B. in den Datis Euklid's), aber seitdem durch Vieta und Descartes die sogenannte analytische Geometrie, d. i. die Beherrschung der Geometrie durch den Calcül, aufgekommen ist, hat bei den Mathematikern als Fachgelehrten das Bedürfniß einer rein geometrischen Analysis sich mehr und mehr verloren. Im In-

teresse der Pädagogik muß man dieses beklagen, und derjenigen Bestrebungen sich freuen, welche neuerlich mehrfach von Seiten der Pädagogen zur Wiedererweckung der geometrischen Analysis aufgetaucht sind.*)

Um der Vergleichung willen nehme ich denjenigen Satz wieder auf, dessen synthetischer Beweis oben mitgetheilt worden ist, nämlich: „Daß die Winkelsumme im Dreieck zwei Rechte beträgt," und gebe hier eine Analysis dieses Lehrsatzes nebst der daraus sich ergebenden Synthesis.

Analysis. 1) Da der Satz eine Vergleichung ausspricht, nämlich zwischen der Winkelsumme im Dreieck einerseits und dem geraden Winkel (2 R) andererseits, so kommt es vor allen Dingen darauf an, beide Glieder dieser Vergleichung vor Augen zu stellen. Die Winkelsumme liegt nun schon, wenigstens in ihren Theilen, in dem gegebenen Dreieck ABC vor; der gerade Winkel aber wird hergestellt**) durch eine irgendwo gezogene gerade Linie nebst einem in ihr als Scheitelpunkt angenommenen beliebigen Punkte.

2) Um nun weiter zu untersuchen, ob jene drei Dreieckswinkel zusammengenommen diesen geraden Winkel genau ausfüllen, wird man dieselben einzeln von dem geraden Winkel hinwegzunehmen suchen und z. B. mit ABC den Anfang machen. Man

*) Die hier in Rede stehenden Hülfsmittel für die Anlegung der Analysis sind es, welche zugleich fortlaufend synthetische Elemente in den Gang der Analysis hineintragen. Doch habe ich darauf in dem Folgenden nicht weiter Rücksicht genommen, vielmehr, übereinstimmend mit dem Sprachgebrauch der Mathematiker, die vorwaltend regressive Bewegung der Untersuchung als den bestimmenden Charakter der Analysis festgehalten.

**) Der gerade Winkel kann auch, was freilich nicht so nahe liegt, als Summe der Innenwinkel zwischen Parallellinien dargestellt werden, wodurch der weitere Verlauf der Analysis eine andere Gestalt annehmen würde. Hier liegt mithin in dem oben angezeigten Sinne die Möglichkeit einer Zerspaltung der Analysis.

legt deshalb am einfachsten*) den geraden Winkel so in die Figur hinein, daß sein Scheitelpunkt in A und der eine Schenkel in AB, folglich der andere Schenkel in AD, die Verlängerung von AB, fällt; alsdann erscheint BAC als ein Theil des geraden Winkels BAD, und es bleibt demnach jetzt nur noch zu untersuchen, ob auch der andere Theil von BAD, nämlich der Außenwinkel CAD, gleich der Summe der beiden anderen Dreieckswinkel ABC und ACB sei.

3) Zu dem Ende legt man den einen dieser beiden Winkel, z. B. ACB, so in CAD hinein, daß der eine Schenkel desselben auf AC**) fällt, mithin der andere Schenkel die Linie AE ergiebt. Alsdann bleibt nur noch zu untersuchen, ob auch $EAD = ABC$ sei.

4) Aber aus der Entstehungsart der Linie AE ergiebt sich sofort (da hier die Theorie der Parallellinien als bekannt vorausgesetzt wird), daß AE parallel BC ist, womit sodann die letzte Frage sich bejahend beantwortet, also der Beweis zu Ende ist.

Will man nun den gefundenen Beweis, ohne Rücksicht auf den Weg, der zu seiner Auffindung führt, in eine bündige und übersichtliche Reihe von Syllogismen zusammenstellen, so erhält man:

Synthesis. Man verlängere AB über A hinaus nach AD (Analysis 2), und ziehe AE parallel mit BC (Analysis 4); dann wird $ABC = DAE$, $ACB = EAC$ (Analysis 3), und

*) Hier ist eine zweite Zerspaltung der Analysis möglich; denn welche (nicht so einfache) Wendung die Untersuchung nehmen müßte, wenn der oben gegebene synthetische Beweis zum Vorschein kommen soll, das wird der Leser ohne Mühe erkennen.

**) Wollte man den Winkel ACB an AD statt AC legen, so würde der Fortgang der Analysis ohne Vergleich schwieriger werden. Hier liegt eine dritte Zerspaltung der Analysis.

fügt man dazu die identische Gleichung $BAC = BAC$ (Analysis 2) und addirt, so erhält man $ABC + ACB + BAC = DAE + EAC + BAC$. Aber von diesen beiden gleichen Winkelsummen macht die letztere, vermöge der Construction, einen geraden Winkel oder 2 R aus, folglich beträgt auch die erstere 2 R.

Bis hieher habe ich fortwährend — ich wiederhole es — die Annahme gemacht, daß der „Satz" an sich, d. i. rücksichtlich dessen was er aussagt, der Rechtfertigung nicht weiter bedürfe, sondern von selbst schon als ein Gegenstand des Interesse sich geltend zu machen verstehe, und man wird zugestehen müssen, daß unter dieser Annahme Analysis und Synthesis in der vorstehend angezeigten Verbindung eine vollgültige Methode, auch selbst für den Unterricht, darbieten. Gesetzt demnach, der Lehrer dürfe schon aus irgend welchen anderen Gründen Interesse für den Gegenstand des Unterrichts voraussetzen, so wird für ihn die Anwendung jener Methode vollkommen gerechtfertigt sein. In diesem Falle befinden sich nun wirklich alle mathematischen Schriftsteller gegenüber denjenigen Fachgenossen, denen sie ihre Entdeckungen mittheilen, und man wird sich nicht mehr darüber wundern, wenn nicht nur die genannte Methode exclusiv als „mathematische" Methode bekannt geworden ist, sondern auch wenn man gewöhnlich, da es hier Männer mit Männern zu thun haben, der Kürze wegen die Analysis entweder ganz weggelassen, oder doch nur kurz angedeutet findet. Einen größeren Mißgriff aber konnte es nicht wohl geben als den, diese „mathematische" Methode nun auch ohne weiteres (wohl gar gleichfalls mit Weglassung der Analysis) bei unseren Gymnasialschülern in Anwendung zu nehmen; denn dasjenige Interesse am Inhalt der Sätze, auf welchem allein die Methode mit Erfolg weiter bauen kann, darf man bei Schülern dieser Art gewiß

nur in ganz isolirten Fällen voraussetzen. „Was geht's den künftigen Juristen, Arzt, Theologen, Philologen u. s. w. an, ob in einem Dreieck zwei rechte Winkel sind? Seinetwegen könnens fünf und zwanzig sein." Ja was geht es den künftigen Mathematiker, Physiker oder Techniker an? Denn die kahle Versicherung, daß er davon dereinst werde Gebrauch machen müssen, erhält für die Schüler nicht eher Bedeutung als bis der Augenblick des Gebrauchs selbst herbeigekommen ist. Man blicke nur in unsere Schulen hinein, soweit sie der gewohnten Methode folgen; die wenigen Schüler, welche an dem mathematischen Unterricht Interesse zeigen, haben, soweit meine Erfahrung reicht, dieses Interesse schon von Hause mitgebracht und nicht etwa erst in der Schule und durch die Schule erhalten. Darf man bei solcher Ohnmacht der Schule sich über die geringen Erfolge des mathematischen Unterrichts noch wundern?

Um dem Schüler an irgend einem Lehrobjecte Interesse einzuflößen, steht der Schule kein anderes Mittel zu Gebote als eine angemessene Behandlung dieses Lehrobjects, und sie muß sich dabei auf den allgemeinen didaktischen Grundsatz stützen, daß der Schüler stets und überall an demjenigen Interesse nimmt, was er selbst hervorbringen lernt. Dieser Satz, so evident an sich, daß er gar keines Beweises bedürftig zu sein scheint (man beobachte nur die Knaben in ihren selbstgewählten Beschäftigungen!), ist freilich noch keineswegs zu einer allgemeinen theoretischen, geschweige praktischen Anerkennung gelangt, was mich jedoch nicht hindern wird, darauf weiter fortzubauen. Nun erstreckt sich die Anleitung zum Hervorbringen und Schaffen, welche dem Schüler durch die oben angezeigte Verbindung von Analysis und Synthesis dargeboten wird, lediglich auf den „Beweis"; der „Satz" selbst dagegen war gegeben, er lag vor, bevor und damit die Methode

überhaupt nur zur Anwendung kommen konnte; und mithin erhebt sich hier die Frage nach einer zu Analysis und Synthesis hinzutretenden Ergänzung, welche eine solche Behandlung des Lehrstoffes herbeiführt, daß dadurch auch der Satz nicht mehr als ein Gegebenes, sondern als ein Werdendes, ein Hervorzubringendes auftritt. Diese Ergänzung würde sodann genau dasjenige sein, was unseren Schulen leider in der Regel fehlt, und durch dessen Herbeiziehung erst die sogenannte „mathematische" Methode sich in eine Unterrichtsmethode von voller pädagogischer Geltung verwandeln würde.

Damit in der hier vorzunehmenden Entwickelung kein Sprung geschehe, zugleich aber auch zur Aufsuchung der in Rede stehenden methodischen Ergänzung sich eine Wegweisung ergebe, möge hier die Frage vorantreten: Ob nicht vielleicht Analysis und Synthesis, sei es einzeln oder in ihrer bisherigen Verbindung, selbst schon so auf den mathematischen Lehrstoff angewandt werden können, daß auch der „Satz" als ein Werdendes und kraft der Methode Hervorzubringendes erscheine? — Was zuerst die Analysis betrifft, so vergegenwärtige man sich den früher angezeigten Gang derselben. Dort wurde zu einem gegebenen Satze die nächste Voraussetzung aufgesucht, deren Richtigkeit auch die seinige zur Folge haben würde; diese Voraussetzung ist aber, für sich allein betrachtet, selbst wieder eine Behauptung, folglich ein Satz, der durch die Analysis zum Vorschein gekommen ist: und damit wäre das Gesuchte schon gefunden, wenn nur nicht das Interesse an diesem Satze das Interesse an dem gegebenen Satze, der selbst noch immer unmotivirt dasteht, zu seiner nothwendigen Voraussetzung hätte. Lassen wir jedoch dieses Bedenken für einen Augenblick auf sich beruhen, so liegt wenigstens auf der Hand, daß man ebenso weiter fortfahren könne; jede Voraussetzung wird, als Behauptung

aufgefaßt, wieder eine Voraussetzung hervorrufen, die mithin selbst wieder ein Satz ist, welchen der Gang der Analysis hervorgebracht hat, u. s. f. bis zum Schluß, und je länger die Analysis ausfällt und je öfter sie sich in Aeste und Zweige zerspaltet, desto größer wird die Ausbeute an Sätzen, welche sie darbietet. Diese Sätze haben freilich so lange nur erst ein hypothetisches Dasein, als die Analysis noch ungeschlossen vorliegt; aber sobald die Analysis ihren Abschluß gefunden hat, so sind dafür auch alle diese Sätze mit Einem Schlage bewiesen, und es bedarf mithin für keinen derselben mehr einer besonderen Analysis, welche vielmehr in der vorigen schon als integrirender Theil enthalten ist. So war in dem oben gegebenen Beispiel zu dem Satze: „Daß die Winkelsumme im Dreieck zwei Rechte beträgt," die nächste Voraussetzung (Analysis 2) die: „Daß der Außenwinkel des Dreiecks gleich der Summe der beiden innern gegenüberliegenden Winkel ist," und alle von da an nachfolgenden Schritte der Analysis können alsdann zugleich als die Analysis dieses Satzes angesehen, und mithin rückwärts wieder zu einem synthetischen Beweise dieses Satzes zusammengestellt werden. Und so in allen Fällen.

Will man von diesem methodischen Verfahren zur Hervorbringung von Sätzen für den mathematischen Unterricht in seiner Gesammtheit Gebrauch machen, so ist sofort klar, daß man noch immer wenigstens einiger Sätze bedarf, für welche man das Interesse des Schülers auf anderem Wege zu gewinnen weiß, um an diese sodann die vorhin bezeichnete Analysis zur Gewinnung neuer Sätze anlehnen zu können. Sätze jener Art zweckmäßig auszuwählen wäre vielleicht nicht unmöglich, etwa durch Anknüpfung des mathematischen Unterrichts an den physikalischen, oder wie man sonst will; sie müßten weit genug auseinander liegen, damit durch die Analysis eines jeden von

ihnen ein möglichst großes Gebiet von Sätzen herbeigeschafft und dem Schüler als ein Ganzes vorgeführt würde, dergestalt, daß jede einzelne Analysis (versteht sich, mit Einschluß der hinterher anzufügenden Synthesis) ein für sich bestehendes und einen vollständigen Cursus bildendes Unterrichts-Pensum darstellte. — Ich wähle als Beispiel Euklid's Elemente, die sich, wie bekannt, zu solcher Behandlung ganz besonders eignen, und nehme an, daß das erste Buch der Elemente als erstes Unterrichts-Pensum der Geometrie solle angesehen werden. Den Schluß dieses Buchs bilden der Pythagoreische Lehrsatz (47. Satz) und seine Umkehrung (48. Satz), und mithin hat im Geiste der hier einzuschlagenden Methode die erste Lehrstunde mit der Aussage des Pythagoreischen Lehrsatzes zu beginnen. Die Schüler haben vermuthlich größtentheils von diesem Lehrsatze schon gehört (denn in den Schulerinnerungen Aelterer pflegt er eine große Rolle zu spielen) und sich dadurch von seiner Wichtigkeit einen dunkeln Begriff gebildet; dergleichen Eindrücke mag man verstärken, etwa von Pythagoras selbst und der geopferten Hekatombe erzählen, und was dergleichen captationes benevolentiae mehr sind. Damit nun aber auch der Satz verstanden werde, bedarf es einer Auseinanderlegung der in ihm enthaltenen Begriffe, welche auf die entsprechenden Euklidischen Definitionen führt. Dies giebt Beschäftigung genug für die zwei oder drei ersten Lehrstunden; ist geometrische Formenlehre vorausgegangen, so kommt man vielleicht kürzer zum Ziele. Die folgende Lehrstunde führt (da nach Euklid's Auffassung nur das rechtwinklige Dreieck als gegeben, d. h. der Pythagoreische Lehrsatz nur als eine Aussage betreffend das rechtwinklige Dreieck angesehen wird) die Aufgabe herbei, die Quadrate über den Dreiecksseiten zu zeichnen (46. Satz); darin aber steckt schon die ganze Reihe der Sätze von 1 bis 34, welche

sich demnach hier durch einen selbständigen analytischen Regressus ergeben muß. Nach Erledigung derselben kann erst zu der Flächenvergleichung geschritten werden, welche mit der Ueberlegung anhebt: Wie es wohl zugehen könne, daß das Quadrat der Hypotenuse mit einer so seltsamen Figur, wie die Quadratsumme der Katheten (die der Ziffer 8, mit eckigen Zügen statt runder, nicht unähnlich sieht), stets gleichen Flächenraum einschließe? Daß hier der Lehrer wohl thut, zunächst an den bekannten Zahlen 3, 4, 5, oder auch 5, 12, 13 u. dgl. wenigstens die Möglichkeit dieser Flächengleichheit vor Augen zu führen, mag hier nur beiläufig erwähnt werden. Die regelrechte Analysis selbst aber führt sogleich den Begriff der Verwandlung herbei, und damit weiter die Aufgabe, eine gegebene geradlinige Figur in ein Parallelogramm zu verwandeln (45. Satz), woraus durch den Regressus der Analysis weiter die Sätze von 35 bis 44 hervorgehen müssen. Durch dieselbe Aufgabe wird sodann auch die Zerlegung des Hypotenusen-Quadrats in die bekannten beiden Rechtecke motivirt, wodurch die Analysis, der jetzt hinreichendes Material zur Verfügung steht, endlich zum Abschlusse kommt. Die nachfolgende Synthesis reproducirt nun, recapitulirend, den Inhalt des ersten Buchs der Elemente in zwei Satzreihen, von denen die eine die Sätze 1 bis 34 und 46, die andere aber die Sätze 35 bis 45 umfaßt, und welche beide in 47 und 48 ihre gemeinschaftliche Ausmündung finden.

Dem Gewinne gegenüber, welchen nach dem Obigen ein Unterrichtsgang, so wie ich ihn hier zu skizziren versucht habe, dem Schüler wirklich bietet, wird man nicht umhin können zweierlei Bedenken zuzugestehen, welche den Erfolg eines solchen Unterrichts wieder mehr als zweifelhaft erscheinen lassen. Das erste ist die unvermeidliche Länge derjenigen Reihe, welche hier der Schüler in Einem Zusammenfassen zu durchlaufen und sich

stets gegenwärtig zu erhalten hat; eine Länge, welche nothwendig war, wenn der beabsichtigte Gewinn überhaupt möglich werden, wenn der Unterricht nicht wieder in ein Aggregat unmotivirter Sätze zerfallen sollte. Man weiß schon, welche Anstrengung von Seiten des Lehrers dazu gehört, sich die fortgesetzte Aufmerksamkeit der Schüler zu erhalten, wenn ein Beweis oder eine Auflösung mehr als den Zeitraum einer Lehrstunde in Anspruch nimmt; hier aber, wo ein Satz vorliegt (wie oben der Pythagoreische Lehrsatz), dessen Beweis die Beschäftigung eines ganzen Cursus ausmachen soll, wo man in jeder Lehrstunde von neuem auf diesen Satz als den eigentlichen Gegenstand der Betrachtung aufmerksam machen, und von neuem den von da auslaufenden analytischen Faden, so weit derselbe bis dahin vorliegt, abspinnen muß, um daraus eine Wegweisung zur Fortführung desselben zu gewinnen: hier wird man zuverlässig, zumal bei Anfängern, denen die Sphäre dieser Begriffe neu oder wenigstens noch ungewohnt ist, sehr bald erwarten müssen, daß die Schüler den immer wachsenden Faden nicht mehr festzuhalten vermögen, mithin das Interesse verlieren und endlich — wo nicht leiblich (denn dagegen hat man Mittel), so doch geistig — davon laufen. Höchstens für reifere Schüler, die schon an minder umfangreichen Betrachtungen die entsprechende Uebung erlangt haben, dürfte man sich von einem solchen Unterrichte Erfolg versprechen. Rechnet man hinzu die vorläufig hypothetische Existenz sämmtlicher Sätze, zu denen der Regressus der vorgenommenen Analysis stufenweise führt, welche selbst auf dem Lehrer wie ein fortwährend wachsender Druck lasten muß, so lange, bis durch den Abschluß der Analysis der bis dahin gleichsam in der Luft schwebende Bau einen sicheren Boden gefunden hat; rechnet man ferner hinzu die vielfach möglichen und sich von selbst herbeidrängenden Zerspaltungen der Analysis,

welche eine gleichmäßige Berücksichtigung erwarten und mithin den einfachen Faden der Betrachtung zu einem verwickelten Gewebe von Fäden anschwellen machen: so wird man ohne Zweifel der Thatsache, daß noch niemals ein solcher Schulunterricht ertheilt worden ist, ihr volles Recht zugestehen und eben so wenig jemals einen solchen Unterricht in der Mathematik fordern, welche Mittel sich auch möchten ausdenken lassen, um für den zum Ausgangspunkte dienenden Satz des Interesse der Schüler gewiß zu sein.

Es bleibt noch zweitens zu untersuchen, ob nicht vielleicht der Synthesis für sich genommen, angewandt auf den gesammten mathematischen Unterrichtsstoff, eine solche Seite abzugewinnen sei, vermöge deren auch der „Satz" als ein Entstehendes und Werdendes erscheine und somit dem Schüler sich als ein Gegenstand des Interesse darstelle; und dieses wird mich zu dem eigentlichen Ziele dieser Abhandlung hinführen. Zwar jede Synthesis weist auf eine vorangegangene Analysis zurück, durch welche sämmtliche Schritte der Synthesis erst ihre Motivirung erhalten, und da die Analysis in ihrer Anwendung auf die Gesammtheit des Lehrstoffs so eben schon verworfen worden ist, so liegt in der Forderung einer alleinstehenden Synthesis für den in Rede stehenden Zweck offenbar etwas Ungereimtes. Indessen wenn man wiederum beachtet, mit welcher Entschiedenheit die herrschende Praxis jene Duplicität der Betrachtung des nämlichen Objects verschmähet, wo der Faden der Wissenschaft zuerst analytisch regressiv und hinterher noch synthetisch progressiv durchlaufen werden soll; mit welcher Entschiedenheit sie im Gegentheil, mit Ausstoßung der Analysis, an der Synthesis allein festhält, so wird man nicht umhin können die Vermuthung zu hegen, daß der Praxis hierbei vielleicht ein an sich ganz richtiger Gedanke vorschweben möge, der

nur müsse aus seinem Dunkel hervorgezogen und mit Bewußtsein weiter verfolgt werden, wenn die dadurch modificirte Synthesis, die alsdann freilich aufhören würde Synthesis zu sein, auf den Namen einer wahrhaften und berechtigten Unterrichtsmethode solle Anspruch erheben können. In der That ist es kaum anders.

Betrachtet man nämlich die herrschenden Lehrbücher, soweit sie der synthetischen Methode folgen, so muß man sichs gestehen, daß dieselben schon mehr oder weniger ein Princip zur Geltung gebracht haben, welches bei Euklid noch eine viel mehr untergeordnete Rolle spielt; nämlich eine Anordnung der Sätze nach Maßgabe derjenigen Gegenstände, welche den Inhalt dieser Sätze ausmachen. Es liegt auf der Hand, und selbst der Schüler giebt es zu, daß im allgemeinen von Brüchen nicht die Rede sein kann, bevor man von ganzen Zahlen geredet hat; eben so wenig vom Viereck, bevor vom Dreieck die Rede gewesen ist; und wenn man, gestützt auf diesen Gedanken, unter der Ueberschrift: „Vom Dreieck“ alle diejenigen Sätze zusammenzustellen versucht, welche Eigenschaften des Dreiecks (zunächst wenigstens die Congruenz der Dreiecke) betreffen, sodann folgen läßt: „Vom Viereck“ u. s. w., so geht man damit offenbar einen Schritt über Euklid hinaus, bei dem sich diese Sätze sehr zerstreut finden. Gesetzt nun aber auch, ein solches Verfahren lasse sich allgemein durchführen (denn thatsächlich geschieht es nicht, indem z. B. die Flächenbetrachtungen bis auf den heutigen Tag vom Parallelogramm ausgehen), so ist wenigstens das sofort klar, daß damit dem Princip der synthetischen Methode noch nicht nothwendig irgend ein Abbruch geschieht. Denn es ist schon oben hervorgehoben, wie mannigfaltige Zerspaltungen der Regressus der Analysis erfahren kann und wie mannigfache Wege sich daraus wieder umgekehrt für die Synthesis ergeben, so daß mithin der Möglichkeit einer Synthesis, welche z. B.

alle Dreieckssätze in einer einzigen Gruppe beisammen liefert, von vorn herein gar nichts im Wege steht. Jede Abweichung von Euklid in der Anordnung der Sätze macht nur andere Beweise für die in Frage kommenden Sätze nöthig, und zur Aufsuchung solcher Beweise ist seit dem zweitausendjährigen Bestehen der Geometrie nicht allein Zeit genug vorhanden gewesen, sondern diese Zeit auch fleißig genug benutzt worden.

Fragt man nach dem Anlaß zu solcher Umordnung einer schon vorhandenen Satzreihe, so kann man als solchen offenbar zunächst nur das Bestreben erkennen, das zu durchlaufende Gebiet durch Unterscheidung bestimmter Stufen des Fortschritts mehr, als es bei Euklid geschehen ist, übersichtlich zu machen. Indem man aber z. B. einem ersten Abschnitte „Von Winkeln und Parallellinien" einen zweiten Abschnitt „Vom Dreieck" nachfolgen läßt, darauf „Vom Viereck" und endlich „Vom Vieleck", so enthält augenscheinlich jeder Begriff in dieser Reihe ein Element mehr in sich als der ihm vorangehende, so daß sich mithin durch die durchlaufene Begriffsreihe zugleich ein Werden, eine Genesis hindurchzieht, welche an und für sich von der zum Grunde liegenden Synthesis vollkommen unabhängig ist. Faßt man nun weiter das bis hierher zurückgelegte Gebiet unter dem Begriffe der „Congruenz" zusammen, und zerlegt diesen Begriff in die beiden: „Gleichheit" und „Aehnlichkeit", mit denen man das durchlaufene Gebiet noch einmal durchläuft, so liegt auch in dieser Begriffsreihe wieder ein Werden unverkennbar vor; denn in der „Gleichheit" wird die Gestalt, in der „Aehnlichkeit" dagegen die Größe freigelassen und damit für das frühere Eine ein Mannigfaltiges an die Stelle gesetzt. Indessen trifft diese Betrachtung immer nur die Ueberschriften, keineswegs aber den Inhalt der einzelnen Abschnitte, welcher im Gegentheil wieder vollständig im Dienste der Synthesis steht; ja man hat sich in

dieser Abgrenzung der Abschnitte durch ein der Synthesis fremdes Princip obendrein noch des Vortheils begeben, sämmtliche Sätze eines und desselben Abschnitts als Glieder einer für sich bestehenden und durch eine selbständige Analysis zu begründenden Synthesis darstellen zu können, wie es oben mit dem ersten Buche Euklids zu zeigen versucht worden ist; denn jetzt wird immer ein Theil dieser Sätze, welcher durch die Ueberschrift allerdings gerechtfertigt ist, erst an einer späteren Stelle des Lehrbuchs, oder vielleicht auch (was ein Fehler sein würde) gar nicht mehr zur Anwendung kommen, und es gehört demnach nur noch ein kleiner Schritt dazu, um nun auch das die Synthesis charakterisirende Hinarbeiten auf einen bestimmten Zielpunkt gänzlich fallen zu lassen. Träte dieser letztere Fall wirklich ein, so wäre offenbar auch an eine die Synthesis begründende Analysis des ganzen Lehrgebäudes nicht mehr zu denken.

Wenn dasjenige Bild, welches ich hier von der Mehrzahl der besseren unter den gebräuchlichen mathematischen Lehrbüchern zu entwerfen versucht habe (denn von den schlechteren verlohnt sichs überall nicht der Mühe zu reden), ein richtiges ist, so kann darüber kein Zweifel bestehen, daß in diesen Lehrbüchern dasjenige Element, welches oben als das nothwendige Erforderniß einer vollgültigen Unterrichtsmethode dargestellt wurde, sich nur erst in einer sehr geringen Andeutung vorfindet. Es handelt sich darum, dem Schüler auch den „Satz“ als einen Gegenstand des Interesse vorzuführen; um dieses zu erreichen, soll die Methode den Satz als ein Werdendes oder, was dasselbe sagt, durch den Schüler Hervorzubringendes darstellen; dahin aber gelangt die vorstehende Genesis der Ueberschriften (wenn ich so sagen darf) nicht im mindesten, indem sie in den Objecten stecken bleibt, denen die Aussagen der Sätze gelten, ohne bis zu diesen Aussagen selbst durchzudringen; sie leistet wenig mehr als, wie oben

angedeutet wurde, die Herstellung einer Uebersicht über ein Chaos von Sätzen, welches dem Schüler sonst unentwirrbar wäre. Aber die Wegweisung liegt nahe, um nun auch jene Forderung zu befriedigen; man lasse die Objecte der Wissenschaft, wie vorhin, werden — aber man beobachte sie auch, belausche sie gleichsam in diesem ihren Werden; und alles, was sonst in der Form isolirter Sätze auftritt, wird dabei sofort als Ergebniß der Beobachtung sich von selbst einstellen. In diesem Werden und dem gleichzeitigen Beobachten dieses Werdens liegt das Princip der genetischen Methode ausgesprochen, welche mithin, insofern sie dem Maximum der möglichen Anforderungen eine Genüge leistet, als die wahre mathematische Unterrichtsmethode zu gelten ein Recht hat.

Zu einer tieferen Einsicht in den Geist der genetischen Methode wird eine nähere Erörterung über den Begriff des Werdens führen, welcher hier dieser Methode zum Grunde gelegt worden ist: denn was es z. B. heiße, ein Bruch oder ein Dreieck solle „werden" und in diesem Werden zugleich „beobachtet" werden, das ist vielleicht nicht ohne weiteres klar. Darüber jedoch scheint es nur nöthig an Bekanntes zu erinnern. So wenig das Dreieck wie den Bruch findet die Wissenschaft schon als ein Fertiges vor, und sie hat demnach nicht nur auszusagen, was ein Dreieck oder ein Bruch sei, sondern es liegt ihr auch ob, von der Entstehung dieser Begriffe ein deutliches Bewußtsein zu besitzen d. h. dieselbe aus dem der Wissenschaft zum Grunde liegenden Princip nachweisen zu können. Nun aber sind die Anfangspunkte der Erkenntniß nicht einerlei mit dem Princip der Wissenschaft. Die Erkenntniß oder, was hier dasselbe sagt, die Forschung nimmt die Objecte so wie ihr der Zufall der Erfahrung dieselben darbietet; der Gang ihrer Untersuchung ist der Hauptsache nach analytisch, und sie findet

eine treue Nachahmerin, mit dem einzigen Unterschiede, daß der Zufall einer Lenkung unterworfen wird und erfolglose Versuche ausgeschlossen bleiben, in dem propädeutischen Unterrichte.*) Ist aber die Erkenntniß bis zu solcher Uebersicht des Stoffes vorgedrungen, daß sie dasjenige Princip wahrzunehmen vermag, aus welchem durch eine selbständige Entwickelung der gesammte Inhalt der gewonnenen Erkenntniß wieder hergeleitet werden kann, so ist eine Wissenschaft im strengen Sinne dieses Worts gewonnen, d. h. eine Summe von Wissen, welche in jenem Princip, insofern sie als Emanation desselben angesehen werden kann, selbst schon potentiell enthalten liegt. Diese Emanation ins Werk zu setzen, macht das eigentliche Geschäft der genetischen Methode aus, und bildet mithin den Gegenstand derjenigen Unterrichtsstufe, von welcher hier die Rede ist, nämlich der Stufe des wissenschaftlichen Unterrichts. Die erste Bedingung zur Realisirung dieses Unterrichts ist demnach die, daß das Princip der Wissenschaft unzweideutig vorliege.

Es würde Vermessenheit sein, wenn man behaupten wollte, die Mathematik habe bereits diejenige Durchbildung erlangt, vermöge deren ihr Princip ohne weiteres ausgesprochen werden könne. In dem unermeßlichen Gebiete der Integralrechnung findet bis auf den heutigen Tag, trotz der unausgesetzten Bemühungen der ersten Mathematiker, noch wenig mehr als ein blindes Umhertappen statt, zwar durch Regeln geleitet, die sich — die eine hier, die andere dort von Erfolg zeigen, aber noch immer ohne Aussicht auf ein die Wissenschaft umschließendes gemeinsames Princip. Denn wenn man die Schaar von neuen Functionen betrachtet, welche gleichsam mit einem Wurfe in der Integralrechnung sich darbietet, während diese auf dem

---

*) Man sehe hierüber den unten folgenden dritten Artikel.

gewöhnlichen Wege mit nicht mehr als drei Classen von Functionen (nämlich den algebraischen, den logarithmischen und den trigonometrischen Functionen nebst den Umkehrungen dieser beiden letztern) betreten wird, so kann man sich des Gedankens nicht erwehren, als ob hier in der Integralrechnung erst der eigentliche Heerd der Mathematik zu suchen sei, zu welchem der gewohnte Weg durch Arithmetik, Algebra und Analysis nur einen engen und seitwärts liegenden Zugang bilde, während den Haupteingang zur Zeit noch niemand entdeckt habe. Diese Auffassung kann nur denen fremd erscheinen, welche die Integralrechnung für nichts anderes als das letzte Kapitel der Mathematik zu halten gewohnt sind, wie die Bruchrechnung für das zweite; giebt man ihre Möglichkeit aber zu, so folgt sogleich, daß ein so unsicheres Gebiet zur Zeit nur erst analytisch (und synthetisch) behandelt werden kann und mithin, der Hauptsache nach, noch nichts für die Thätigkeit der Pädagogen darbietet. Aehnliches tritt in anderen Gebieten der Mathematik ein, z. B. in der Zahlentheorie, welche noch immer neben der Integralrechnung einen Hauptgegenstand der mathematischen Forschung ausmacht. Viel günstiger dagegen gestaltet sich die Sache, wenn man auf Arithmetik und Geometrie innerhalb der sogenannten Elementar-Mathematik sich beschränkt, wo bereits ein ausreichendes Material zur Verfügung vorliegt; denn wenn gleich es auch hier nicht an Streit fehlt, so sind dafür die Ansichten schon um so bestimmter und entschiedener ausgebildet, so daß man an jeden mathematischen Lehrer ohne Bedenken die Forderung stellen darf, er kenne und besitze ein Princip, aus welchem er vor seinen Schülern die Wissenschaft zu entwickeln verstehe. Die Begründung und Vertheidigung dieses Princips gehört aber begreiflicher Weise nicht in die Schule, sondern ist nur Sache desjenigen, der die Mathematik als Fachwissenschaft

treiben will, und ergiebt mithin den eigentlichen Charakter des akademischen Unterrichts, insofern dieser das von den Gymnasien präoccupirte Gebiet noch einmal zu durchlaufen hat; dem Gymnasialschüler soll es nur darauf ankommen, nach irgend einem Princip in die Sache eingeführt zu werden, wobei es Sache des Lehrers bleibt zu entscheiden, nach welchem. — Wer Philosophie studiren will um seine Weltanschauung zu ergänzen und abzurunden, dem mag eine einzige philosophische Schule genügen; dem Philosophen vom Fach aber liegt es ob, diejenige Schule, der er angehört, auch nach außen zu vertreten und gegen die Angriffe fremder, welche er deshalb kennen muß, zu vertheidigen. Genau so ist es im vorliegenden Falle mit der Mathematik.

Die Entwickelung der Wissenschaft aus ihrem Princip macht, wie schon gesagt, das Wesen der genetischen Methode aus, und da über die Art und Weise, wie diese Entwickelung sich in Gang zu setzen habe, jenes Princip selbst den vollständigen Aufschluß geben muß, so ist davon hier nicht weiter zu reden. Soll ich aber wenigstens auf ein Beispiel hinweisen, so nenne ich als ein ganz vorzügliches, obgleich außerhalb der Mathematik stehendes, Herbarts praktische Philosophie (1808 in Göttingen erschienen), ein Werk welches, neben der Schönheit seiner Sprache und der Evidenz seiner Grundlegung, das anschaulichste Bild von dem, was die genetische Methode leisten soll, zu geben vermag. Sofern ich nämlich von mir auf andere schließen darf; denn mir ist solches Bild damals, wo ich Herbart selbst zu hören das Glück hatte, in diesem Beispiele zum ersten Male recht lebendig vor die Seele getreten. — Diesem und ähnlichen Beispielen zu folgen, und zwar mit besonderer Rücksicht auf den Unterricht zu folgen, das ist die Aufgabe, welche denjenigen Vertretern der Wissenschaft, die zugleich Pädagogen

sein wollen, also den eigentlichen Fachlehrern sowohl der Gymnasien wie der Universitäten zu lösen obliegt. Mag man mit diesem Geschäfte die Forscher im strengen Sinne dieses Worts, die Koryphäen der Wissenschaft, nicht behelligen; ihnen bleibt billig der erste Rang, indem ihre Thätigkeit darauf gerichtet ist, das Material der Wissenschaft erst zu erschaffen, zu erfinden und überhaupt nur erst hinzustellen. Auf Grund der stattgehabten Forschung aber folgen in zweiter Linie wir nach, um dem gewonnenen Stoffe nun auch diejenige wissenschaftliche Form zu geben, welche der erziehende, d. h. zur Bildung anstrebende Unterricht fordert. Unsere Aufgabe ist es, aus dem vorliegenden Material durch eine richtige Abstraction die wissenschaftlichen Principien herauszulösen und ans Licht zu stellen; unsere Aufgabe ist es ferner, aus diesen Principien durch den Fluß der Genesis Satz um Satz hervorspringen zu lassen, bis dahin wo die Principien selbst dem Strome ein Halt gebieten; und wenn dabei noch von eigentlicher Forschung die Rede sein kann, so wird diese nur auf die Ergänzung und Ausfüllung solcher Lücken sich zu beziehen haben, welche durch die vorgenommene Genesis selbst augenfällig zu Tage getreten sind. Daß bei solcher Behandlung der Charakter der Wissenschaft, in der Mathematik also insbesondere die Strenge, nicht vernachlässigt werden darf, das versteht sich so sehr von selbst, daß jeder Verstoß dagegen unsere Bemühungen unfehlbar um ihren Credit bringen wird; nicht minder aber ist auch die Genesis von jeder Künstelei frei zu halten, damit sie nicht am Ende gar auf schwankenderen Stelzen einherschreite, als diejenigen sind, um deren willen die Synthesis für die Zwecke des Unterrichts verworfen werden mußte. Man weiß, daß schon Versuche im Geiste der genetischen Methode gemacht worden sind, welche aus dem einen oder dem andern Grunde bei den strengen Mathematikern sich keiner besonderen

Achtung erfreuen. Man muß es also anders und besser machen, um diesen den Beifall abzunöthigen, und erst wenn auch dieses geschehen ist, wird man sagen können, daß die Mathematik eine wahrhaft pädagogische Bearbeitung erfahren habe, die ihr zur Zeit noch ganz entschieden abgesprochen werden muß.

Die Berechtigung des „Satzes" war es, welche in Folge der obigen Entwickelungen für die Zwecke des Unterrichts die Genesis statt der Synthesis zu setzen nöthigte, und welche Stellung nun dem einzelnen Satze in dem Flusse dieser Genesis zukommt, das wird trotz der unvollständigen Andeutungen, auf welche ich mich hier habe beschränken müssen, von selbst klar sein. Denn es liegt auf der Hand, daß man nicht diesen Fluß wie ein Continuum soll vor dem Schüler ablaufen lassen; es bedarf der Stufen, welche klein genug sind, damit sie mit einem Blicke überschauet werden können, und diese Stufen eben sind die „Sätze". Oder um noch genauer zu reden, man kann in jeder dieser einzelnen Stufen einen Anfangspunkt und einen Endpunkt unterscheiden; den Anfangspunkt bildet eine durch den Lauf der Genesis herbeigeführte Weisung, daß dieses oder jenes geschehen solle, kurz ein theoretisches Problem*), und die geschehene Lösung liefert, als Endpunkt dieser Stufe, den Satz. Das „Problem" erscheint demnach hier als das Erste und Vornehmste; es legt dem Schüler eine Forderung auf, welche derselbe unter Assistenz des Lehrers auszuführen hat, und regt somit unmittelbar des Schülers Selbstthätigkeit an. Ja der ganze Unterricht besteht hienach aus einer zusammenhängenden Kette

*) Zu unterscheiden von den praktischen Problemen, zu denen die sogenannten Uebungsaufgaben gehören und deren Auflösung aus einer Analysis und einer Synthesis zusammengesetzt ist. Diese von dem Unterrichte auszuschließen, ist nicht im geringsten meine Absicht; nur stehen sie außerhalb des genetischen Entwickelungsganges.

von theoretischen Problemen, welche sämmtlich aus dem vorangestellten Princip der Wissenschaft emaniren, und deren Lösung, die gleichfalls in diesem Principe schon vorgezeichnet liegt, den Schüler fortlaufend zu eigenen Productionen, nämlich zur Hervorbringung der Sätze hinführt. Der „Satz“ aber tritt hier nur als der Endpunkt und Schlußstein einer Betrachtung auf, und da seine Entstehung producirend begleitet worden ist, so trägt er sofort das Merkmal der Evidenz in sich und ein besonderer Beweis erscheint vollkommen überflüssig; oder vielmehr der Beweis liegt zugleich mit dem vollendeten Satze schon vollständig vor. Denn wenn man zum Abschluß, etwa um der Uebung der Schüler willen, nun den gewonnenen Satz für sich ins Auge faßt und nach dessen Beweise fragt, d. h. nach der Begründung aus den vorangegangenen Sätzen, so hat man zur Erlangung dieses Beweises nur nöthig den zurückgelegten Weg wieder rückwärts zu durchlaufen; Analysis und Synthesis dagegen in ihrer oben angegebenen Bedeutung kommen innerhalb der genetischen Methode nirgends mehr zur Anwendung. Diese Erscheinung, daß mit dem Satze zugleich auch schon sein Beweis fertig vorliegt, ist freilich eine Zugabe der genetischen Methode, von welcher man ursprünglich nur die Herstellung des Satzes, nicht aber die des Beweises forderte; indessen wer hätte sie nicht voraussehen müssen, da das Eine ohne das Andere gar nicht geleistet werden kann, sobald nämlich der Satz, wie billig, zugleich auch mit dem Anspruche auf Wahrheit auftreten soll?*)

*) So wie vorhin theoretische und praktische Aufgaben, so kann man hier auch theoretische und praktische Sätze unterscheiden, welche letzteren gleichfalls außerhalb des genetischen Entwickelungsganges stehen und, in der Form von Uebungssätzen vorgelegt, einen Beweis durch Analysis und Synthesis erfordern. Denn bei der Unvollkommenheit alles menschlichen Thuns wird es immer ein Residuum von Wahrheiten geben, welches an den Schüler zu bringen nicht minder wünschenswerth erscheinen möchte, wenn

Sollte es mir nicht gelungen sein, hier von demjenigen, was die genetische Methode für den mathematischen Unterricht zu leisten vermag, ein bis in die kleinsten Details vollständiges Bild zu geben, so muß ich die Schuld hauptsächlich darauf schieben, daß die Natur der Sache mir nicht gestattet den allgemeinen Betrachtungen durch Beispiele erläuternd zu Hülfe zu kommen. Jedes Beispiel würde nur aus dem Ganzen der Genesis und aus dem darüber schwebenden Princip begriffen werden können, und ich muß deshalb auf den nachfolgenden zweiten Artikel verweisen, in welchem ich den Versuch einer Genesis der Geometrie, und zwar, wie es um der Aufstellung des Princips willen nöthig ist, von den ersten Elementen beginnend, vorlegen werde.*) Wenn man aber von dem hier gewonnenen Standpunkte aus noch einmal auf denjenigen Entwickelungsgang zurückblickt, durch welchen aus der Synthesis die Genesis zu Stande gekommen ist, so muß wenigstens die schon oben im voraus angekündigte Thatsache sich außer allen Zweifel gestellt haben, daß die Synthesis, indem sie das sie zur Genesis constituirende Element in sich aufnahm, vollständig aufgehört hat sie selbst zu sein. Die Genesis also ist nicht mehr Synthesis. Zwar, wollte man etwa ein synthetisches Lehrbuch vornehmen und darin jeden Lehrsatz hinter seinen Beweis stellen, wohin

gleich es aus der Emanation des vorangestellten Princips nicht ergriffen werden kann. Dem Schüler würde somit bei fortschreitendem Unterricht fortwährend nicht nur zur Analysis des Problems, sondern auch zu derjenigen des Theorems die erwünschte Gelegenheit geboten werden. Uebrigens gedenke ich dieser praktischen Seite des Unterrichts, von welcher mehr zu sagen wäre, hier nur im Vorbeigehen, da mir zunächst die richtige Ueberlieferung des theoretischen Wissens an den Schüler vorzugsweise der Erörterung bedürftig zu sein schien.

*) Einen gleichen Versuch bietet mein (unvollendet gebliebenes) Lehrbuch der Arithmetik vom Jahre 1846, welches indessen noch nicht die zweckmäßigste Form eines Lehrbuchs für die Unterrichtsstunden erreicht hat, sondern mehr ein System der Wissenschaft darstellt.

er im Geiste der reinen Synthesis wirklich gehört (denn nur um den Zielpunkt jeder einzelnen Untersuchung schon im voraus erkennen und an ihn die Analysis anknüpfen zu können, findet man die Sätze den Beweisen immer vorangestellt), so würde das Ganze ebensowohl das Ansehen eines continuirlichen Stromes gewinnen, wie oben bei dem Verfahren der genetischen Methode, und beide Ströme würden obendrein in Bezug auf ihren sachlichen Inhalt vollständig einander decken. Aber der Strom der Synthesis führt über einen glühenden Boden, wo in jedem Augenblicke die Wasser versiegen und in jedem Augenblicke das Fahrzeug, welches zum Ocean strebt, trocken liegen würde, wenn nicht ein Zufall wirklich fortwährend, man weiß nicht wie, noch woher, neue Zuflüsse herbeischaffte; der Strom der Genesis dagegen fließt in einem kühleren Bette, und die nämlichen Wellen, welche schon an seinem Ursprunge den Kahn bespülten, geleiten diesen ohne Unterbrechung auch bis zur Mündung ins Meer. Ohne Bild: die Synthesis strebt nach einem Ziele, welches sie sich schon im voraus festgestellt hat; die Genesis kennt kein solches Ziel. Die Synthesis blickt vorwärts auf ihr Ziel, und greift überall hin nach Mitteln, gleichviel welchen, um nur dieses Ziel zu erreichen; die Genesis schauet rückwärts auf das vorangestellte Princip, sie folgt einzig den Weisungen dieses Princips, unbesorgt, wohin sie damit gelangen werde. Die Synthesis ist gleichsam die scholastische Philosophie, welche vor aller Speculation sich einen Zielpunkt für ihre Speculation — seien es z. B. die Dogmen der Kirche — unverrückbar feststellt, und nun lediglich zu dessen Nachweisung und Begründung alle Hülfsmittel der Speculation, die sie auftreiben kann, zurichtet und wirken läßt; die Genesis gleicht dagegen der wahren Philosophie, welche der Evidenz ihrer Ausgangspunkte gewiß ist, und sich dabei beruhigt nur dahin zu gelangen, wohin diese führen, und nur so weit,

wie diese führen. Die Synthesis ist zu vergleichen dem Jesuitismus, oder noch mehr dem vulgären Radikalismus, der seine Ideen um jeden Preis, durch jedes Mittel ins Leben einführen will, der mit Karl Heinzen ausruft: „Wäre mit einem Dolchstoß Gerechtigkeit zu schaffen, wir griffen nach dem Dolch statt nach der Feder"; die Genesis dagegen ist die wahre Tugend, die keine Zwecke, keine Pläne durchaus will, sondern für alles Handeln sich der alleinigen Führung der sittlichen Ideen anvertrauet. Die Synthesis endlich — ist im Grunde eigentlich Nichts, nämlich nur ein Halbes, denn erst durch Zutritt der Analysis wird daraus eine vollständige Methode; die Genesis aber ist selbst schon eine Methode.

Die Genesis ist eben so wenig einerlei mit der Analysis. Diese Verwechselung kann nur da eintreten, wo man den Unterschied zwischen den Principien der Wissenschaft und den Anfangspunkten der Erkenntniß, welcher schon oben angezeigt wurde, nicht festzuhalten vermag: einen Unterschied, der freilich mit den „angeborenen" Formen der Anschauung und mit dem Begriffe von „schlafenden" Vermögen, die man „wecken" könne (einem der sinnlosesten Begriffe, den philosophische Speculationen jemals hervorgebracht haben), nicht ohne Zwang würde in Einklang gebracht werden können. Die Anfangspunkte der Erkenntniß, von denen die Analysis ausgeht, werden durch die Erfahrung dargeboten, und als einen solchen Anfangspunkt kann man immerhin z. B. die empirisch erkannte Thatsache des Pythagoreischen Lehrsatzes ansehen, mit welcher derjenige analytische Regressus anhebt, welcher oben nach Anleitung des ersten Buchs der Euklidischen Elemente skizzirt worden ist. Die Principien der Wissenschaft dagegen, welche für die Genesis die Ausgangspunkte abgeben, liegen stets schon in einem abstracteren Gebiete; bei der Allgemeinheit d. i. Inhaltsleere der ihnen inwohnenden

Begriffe ist ihnen die unmittelbare Evidenz wesentlich, und indem das Hinabsteigen in den Umfang dieser Begriffe zuletzt wieder zu der Erfahrung hinführt, löst demnach die Genesis die Aufgabe, die Erfahrung, welche die Analysis empirisch vorfindet, als ein speculativ Erzeugtes nun auch zu begreifen. Die Analysis sucht zu der Wirkung die Ursache, zu der Folge den Grund; und da der Grund nur als ein Mannigfaltiges vor der metaphysischen Speculation seine Geltung behaupten kann*), so findet darin auch die Mannigfaltigkeit in dem analytischen Regressus seine Erklärung. Die Genesis dagegen geht von der Ursache zur Wirkung, von dem Grunde zur Folge; und zwar nicht etwa bloß äußerlich, so daß sie nur die logischen Beziehungen zur Sprache brächte, welche den Grund schließlich zur Folge gestalten (denn dies würde das Geschäft der Synthesis sein), sondern sie erzeugt aus dem Grunde die Folge, dergestalt, daß man dem Werden der Folge aus dem Grunde zuschauen, es beobachten kann. Kurz, und um mit wenig Worten das Ganze zu recapituliren: die Analysis verfährt nur regressiv, Synthesis und Genesis dagegen verfahren progressiv. Sodann: die Synthesis besitzt das Motiv ihres Progressus in dem Zielpunkte, die Genesis dagegen in dem Ausgangspunkte der Bewegung.

Die Genesis endlich — um nun zum Schluß noch einmal auf die Seite des Unterrichts zurückzukommen — rühmt sich nicht des Vorzugs, eine infallibele Methode zu sein, welche etwa ohne Zuthun des Lehrers oder gar trotz dem Lehrer zum Ziele führte; sie fordert Thätigkeit, sie fordert Anstrengung, wie nur überhaupt eine Methode; aber sie leistet dafür auch ein Wesentliches mehr. Es gibt, und ich habe dies schon oben zugestanden, der glücklichen Naturen wirklich, welche mit sicherm Takte sich

*) Herbart's Metaphysik.

ein System von Manieren, in Behandlung des Lehrstoffs wie der Schüler, anzueignen wissen, und damit die besten Erfolge erlangen; aber dergleichen Naturen sind selten, und viel häufiger trifft man den entgegengesetzten Fall, wo der Lehrer aus methodischer Unkenntniß weder den Stoff zu formen, noch den Schüler zu gewinnen vermag, und endlich nach vergeblichem Ringen sich zu derjenigen Indolenz hinabgedrückt sieht, mit welcher das Lastthier sein Tagewerk vollbringt. An diese Lehrer möchte meine Rede sich wenden, so wie nicht minder an diejenigen jüngern Lehrer, welche der Gefahr zwar noch mehr oder weniger fern sind, aber ihr unter gleichen Umständen unausbleiblich wieder entgegen gehen. Es wird ihnen hier eine Methode geboten, welche ein Element, und zwar ein höchst wichtiges, mehr in sich trägt als die bisherige Praxis. Während der Schüler sonst nur in leidender Hingebung die ihm dargebotenen Kenntnisse aufnimmt, und diese ihm mithin ein Gleichgültiges und Aeußeres bleiben, wird dagegen hier unmittelbar und aus Einem Princip die Selbstthätigkeit des Schülers angeregt, und alle Erkenntniß ergiebt sich nebenbei und als nicht ausbleibende Folge von selbst. Ich setze hinzu, der Schüler lernt gern und mit Lust, und er mag, so lange die Spannung der Kraft vorhält, gar nichts lieber thun als lernen; denn er ist selbstthätig, indem er lernt, und dazu hat er unmittelbar die allerhöchste Lust.*) Sollte aber solche Lust nicht rückwärts wieder die gleiche Lust im Lehrer anzünden? — Ferner möchten meine Worte aber auch zu den eigentlichen Fachgelehrten dringen, wenigstens denjenigen unter ihnen, welche der didaktischen Praxis näher stehen als der

*) Ich möchte gern die ganze zweite Rede aus Fichte's Reden an die deutsche Nation hiehersetzen, aus welcher die letzten Worte genommen sind. Bestimmter, kräftiger und wahrer als in dieser Rede kann die Aufgabe der Erziehung nicht wohl ausgesprochen werden.

gelehrten Forschung, und denselben in Erinnerung bringen, wie die bisherige Form der mathematischen Darstellung, weil ohne Rücksicht auf das lernende Subject hervorgegangen, darum dieser Rücksicht noch keineswegs von selbst schon zu genügen braucht. Es ist ein Irrthum zu glauben, die Mathematik kenne nur eine Form, sei nur möglich in einer Form, nämlich der Form der sogenannten mathematischen oder Euklidischen Methode, und diese Form sei deshalb auch die einzige zulässige für den Unterricht; bleibt ja dabei die Rücksichtnahme auf den lernenden Schüler lediglich der zufälligen Geschicklichkeit des Lehrers anheimgestellt, der, wenn er nur einiger Maßen mit pädagogischem Wissen ausgerüstet ist, bei der vorgeblichen Unantastbarkeit der mathematischen Methode sich unmöglich wohl fühlen kann. Vielmehr diese Unantastbarkeit soll (versteht sich, nur für die Zwecke des Unterrichts) gebrochen und die Berücksichtigung des Schülers schon von vorn herein in Betracht gezogen werden; aus den Händen der dunkeln und nicht zu berechnenden Kraft des Zufalls soll der Unterricht unter die Botmäßigkeit einer besonnenen Kunst gebracht werden, die ihres Zweckes sicher gehe*); damit aber wird aus der synthetischen Methode, wie oben gezeigt worden ist, unfehlbar die genetische. Es gab eine Zeit — die gute alte Zeit! — wo der beste Philolog eben deshalb schon für den besten Lehrer, wohl gar für den besten Schuldirector galt; diese Zeit ist vorüber. Es heißt nicht mehr parceque, sondern quoique; die Wissenschaft ist herangewachsen, sie nimmt mehr als einen ganzen Menschen in Anspruch, und man könnte sich fast noch darüber wundern, daß Einzelne, statt dem Reize nachzugeben, der in der wissenschaftlichen Forschung liegt, ihre Muße lieber pädagogischen

*) Fichte a. a. O.

Studien zuwenden — wenn nicht auch hierin ein eigenthümlicher Reiz enthalten wäre. Für die Mathematiker aber scheint jene Zeit noch nicht zu den vergangenen zu gehören; von Lehrern der Mathematik, gelehrten wie halbgelehrten, wird noch immer unsäglich viel gefehlt, und alles auf Rechnung der gepriesenen, obwohl mißverstandenen „Evidenz" der Mathematik. Darum ist es dringend noth, daß diejenigen Fachgelehrten, denen es um den Unterricht ein Ernst ist, lieber heute als morgen zu pädagogischen und insbesondere psychologischen Studien greifen, die Natur des lernenden Geistes zu erfassen suchen, und erst wenn dieses allseitig genug geschehen ist, in einer darauf gebaueten und dadurch gerechtfertigten Form, welche unausbleiblich die genetische Methode sein wird, den mathematischen Lehrstoff für die Zwecke des Unterrichts neu zusammenstellen. Damit werden sie der Welt einen größeren Dienst erweisen als durch das undankbare Geschäft, Tag für Tag planlos den Schutt der Wissenschaft aus einem Winkel in den andern zu tragen.

Zweiter Artikel.

Wenn vielleicht der Leser dem ersten Theile dieser Abhandlung nicht ohne einigen Beifall bis zu Ende gefolgt ist, so hoffe ich jedoch kaum, mir den gleichen Beifall auch noch für den vorliegenden zweiten Artikel zu erhalten, welcher die Bestimmung hat, den Gang der genetischen Methode an dem Beispiele der ebenen Geometrie zu erläutern. Denn was ich hier geben werde, das gilt auch mir noch nicht als ein Fertiges und Vollendetes; und wenngleich ich Jahre lang im Geiste der genetischen Methode die Geometrie behandelt und darin unterrichtet habe, so hat dagegen noch stets bei jedem neuen Unterrichtsgange das bis dahin vorhandene System sich mehr oder minder Abänderungen unterwerfen müssen, um, wie ich glaube, den Anforderungen der wahren Genesis stets näher zu kommen, und somit ist nicht zu absehen, ob nicht dergleichen Abänderungen auch in der Folge noch hinzutreten werden. Indessen da es für den augenblicklichen Zweck nur um eine Erläuterung der oben ausgeführten allgemeinen Betrachtungen sich handelt, so gebe ich getrost was ich habe, auf die Gefahr hin, daß darin noch Mängel sich werden nachweisen lassen. War der Grundgedanke nur nicht verfehlt, so wird eine Verständigung in den Details hinterher nicht ausbleiben.

Die erste Frage behufs Anlegung der genetischen Methode ist immer diejenige nach dem Princip der Wissenschaft, und diese Frage läßt sich immer sofort in die beiden anderen zerfällen: Was ist gegeben? und: Was soll mit dem Gegebenen vorgenommen werden? Beide Fragen aber sind für die Geometrie ohne alle Schwierigkeit zu beantworten.

Zuerst das Gegebene. Unter dieser Bezeichnung wird hier offenbar nicht das Gegebene der Erfahrung verstanden, welches im Gegentheil der Analysis zur Anknüpfung dienen würde, sondern vielmehr ein a priori Gegebenes, bei welchem als den letzten Elementen des erfahrungsmäßig Gegebenen die Analysis schließlich stehen bleibt und aus welchem demnach rückwärts wieder das erfahrungsmäßig Gegebene muß hergestellt werden können. Dieses a priori Gegebene bilden aber für die Geometrie nach allgemeinem Zugeständniß die sogenannten Raumgrößen, nämlich: Punkt, Linie, Fläche, Körper. Diese vier Begriffe stehen ferner nicht etwa äußerlich unverbunden neben einander, sondern durch dieselben zieht sich selbst wieder insofern ein gemeinsames Band hindurch, als man einerseits durch Zuziehung des Begriffes der Bewegung die Linie aus dem Punkte, die Fläche aus der Linie, der Körper aus der Fläche kann hervorgehen lassen, andererseits aber durch Benutzung des Begriffes der Grenze aus dem Körper wieder rückwärts zur Fläche, aus der Fläche zur Linie, aus der Linie zum Punkte gelangt. Diese doppelte Abwickelung der nämlichen Begriffsreihe verbürgt zugleich ihre Abgeschlossenheit nach der einen wie nach der andern Seite.

Was nun weiter mit diesem Gegebenen vorgenommen werden soll, das wird allgemein durch das Wort Construction bezeichnet, d. h. man kann die Aufgabe der Geometrie so aussprechen: Die gegebenen Raumgrößen in alle möglichen Verbindungen zusammenzustellen, und nachzusehen, welche Gesetze sich dabei einfinden. Schon die nothwendige Rücksicht auf Ordnung so wie auf Vollständigkeit der Resultate schließt von selbst die Forderung ein, jene Constructionen unter der Leitung von combinatorischen Principien vor sich gehen zu lassen und demnach tritt als die erste Aufgabe der Geometrie die Combination

aus je zweien der obigen Elemente voran, woraus sodann weiter der Uebergang zu den Combinationen aus je drei, vier ꝛc. Elementen sich ergeben muß.

Eine nähere Betrachtung zeigt nun aber sofort die Möglichkeit, die Aufgabe der Geometrie, unbeschadet ihrer Vollständigkeit, dahin zu beschränken, daß man von der oben aufgestellten Reihe der Raumgrößen die äußersten Enden, nämlich Punkt und Körper, fallen läßt. Der Körper nämlich, welcher seiner Natur nach nur als begrenzter Körper auftreten kann, ist durch die ihn begrenzenden Flächen schon vollständig bestimmt — welches bei Flächen rücksichtlich der sie begrenzenden Linien und bei Linien rücksichtlich der sie begrenzenden Punkte nicht der Fall ist, — und muß demnach mit Nothwendigkeit aus der Aufstellung von Flächen-Constructionen sich von selbst ergeben. Der Punkt aber kann, combinatorisch zusammengefaßt mit der Linie oder der Fläche, nur dann in eine Beziehung zu dieser gebracht werden, wenn er in die Linie oder die Fläche hineinfällt, weil in jedem anderen Falle jede Vermittelung unter den vorhandenen Elementen fehlen würde, so lange man nämlich, wie billig, die Herbeiziehung eines zur Vermittelung dienenden neuen Elements ausschließt; woraus folgt, daß der Punkt stets nur als enthalten in einer Linie oder einer Fläche in geometrische Constructionen hineingezogen werden kann. Nicht ebenso verhält es sich dagegen mit der Linie, indem z. B. der Begriff des Dreiecks und seiner drei Seiten (aber nicht seiner drei Winkel) recht gut könnte ohne Zugrundelegung einer Ebene aufgefaßt werden; kurz es bleiben für die Aufgabe der Geometrie in ihrer ersten und einfachsten Gestalt folgende drei Hauptfälle stehen:

1) Linie und Linie.
2) Linie und Fläche.
3) Fläche und Fläche.

Weiter fällt nun wieder auf den Begriff der Linie wie auf denjenigen der Fläche die Unterscheidung zwischen dem Geraden und dem Krummen. Das Gerade ist stets nur Eines, das Krumme dagegen schließt eine große Mannigfaltigkeit in sich, welche a priori gar nicht übersehen werden kann; obendrein geht die Geometrie gar nicht darauf aus, die Mannigfaltigkeiten des Krummen zu erschöpfen, und niemals wird etwa die Erfindung einer neuen krummen Linie oder Fläche an sich als eine Bereicherung der Geometrie zu gelten Anspruch machen. Darum aber kann beim Beginn der Geometrie das Krumme, dem Geraden gegenüber, nur erst negativ definirt werden; jede positive Definition würde schon dieses oder jenes bestimmte Krumme, und nicht mehr das Krumme im allgemeinen zum Vorschein kommen lassen; und deshalb darf die Aufgabe der Geometrie das Krumme nicht schon wie ein vor der Geometrie Gegebenes voraussetzen, sondern es ist vielmehr zu abwarten, wo und unter welchen Umständen ein Krummes durch den Lauf der geometrischen Genesis sich von selbst einstelle. Es bleibt mithin die Aufgabe der Geometrie auf das Gerade, d. h. auf die Constructionen aus geraden Linien oder G e r a d e n und geraden Flächen oder E b e n e n beschränkt, und die obigen drei Hauptfälle, mit denen als den einfachsten (insofern sie nur zwei Elemente enthalten) die Geometrie zu beginnen hat, reduciren sich auf die folgenden:

1) G e r a d e u n d G e r a d e.
2) G e r a d e u n d E b e n e.
3) E b e n e u n d E b e n e.

In welcher Reihenfolge man nun diese drei Fälle abhandeln wollte, das würde gleichgültig sein, wenn sie unabhängig von einander eine Entwickelung zuließen, und da jede Combination aus mehr als zwei Elementen schließlich immer auf Combina-

tionen aus zwei Elementen zurückgeführt werden kann, so würde unter der gemachten Voraussetzung die Geometrie in drei Theile zerfallen, die völlig getrennt neben einander daständen. Aber es ist bekannt genug, daß die vorgegebene Unabhängigkeit in Bezug auf keinen jener drei Fälle, gegenüber den beiden übrigen, wirklich stattfindet (man erinnere sich nur, daß schon der erste Fall nicht in einer Ebene erledigt werden kann), und es würde demnach scheinbar nichts anderes übrig bleiben als jene drei Fälle zugleich anzugreifen und neben einander zu behandeln. Aber die historische Entwickelung der Geometrie bietet ein einfacheres und dazu in völliger Anerkennung sich befindendes Auskunftsmittel, auf dessen Begründung ich mich deshalb hier nicht weiter einlassen will; sie hebt nämlich unter dem Namen der Planimetrie zuerst alle diejenigen Constructionen heraus, welche in einer Ebene ausgeführt werden können (wodurch mithin der Fall 3 vorläufig ausgeschlossen bleibt), und läßt sodann erst unter dem Namen der Stereometrie die übrigen Constructionen nachfolgen, welche nicht in einer Ebene Platz finden. Da diese Anordnung augenscheinlich das Gesammtgebiet der Geometrie gleichfalls erschöpft und obendrein den Gewinn gewährt, daß nicht schon von vorn herein eine Zersplitterung des Entwickelungsganges eintritt, so ist kein Grund davon abzuweichen. Doch soll damit keineswegs die Behauptung aufgestellt sein, daß nun auch der Unterricht in der Planimetrie vollständig abgeschlossen sein müsse, bevor und damit die Stereometrie beginnen könne; vielmehr lassen sich bei dem Gange unseres Schulunterrichts erhebliche Gründe für das Gegentheil angeben, die ich hier nicht wiederholen will.

Diese Betrachtungen soll der Lehrer für sich angestellt haben, bevor er zum Unterrichte schreitet. Der Unterricht selbst aber

beginnt nun damit, die Aufgabe der Planimetrie auf folgende Weise auszusprechen:

Gegeben ist eine Ebene, nebst einer unbegrenzten Anzahl gerader Linien.

Gefordert wird diese Geraden in jener Ebene zu allen möglichen Verbindungen zusammenzustellen.

Als **Grundsatz** steht dabei fest, daß eine Gerade, sobald sie nur zwei Punkte mit der Ebene gemein hat, ihrer ganzen Erstreckung nach in die Ebene hineinfällt.

Als **Grundforderungen** treten dabei auf: 1) Durch einen gegebenen Punkt der Ebene eine Gerade in dieselbe hineinzulegen, und: 2) Eine Gerade innerhalb der Ebene um einen beliebig in jener angenommenen Punkt zu drehen.

Hierbei muß ich einen Augenblick stehen bleiben. Ich setze voraus, daß man es mit Schülern zu thun habe, welche in den geometrischen Vorübungen schon mannigfach mit geometrischen Constructionen beschäftigt gewesen sind, und diese Schüler rücksichtlich der so eben ausgesprochenen Aufgabe der Planimetrie zum Zugeständniß zu bringen, das kann keine Schwierigkeiten haben; man wird nur darauf aufmerksam machen dürfen, daß dasjenige, was ihnen bisher nur in einzelnen Problemen dargeboten worden ist, jetzt in einem zusammenhängenden Entwickelungsgange erschöpfend solle zum Vorschein gebracht werden. Ferner darf man die Voraussetzung machen, der Schüler habe bereits durch seine vorhergegangenen Beschäftigungen sich einen vollkommen klaren (wenngleich noch nicht, nach der Kantischen Unterscheidung, einen deutlichen) Begriff sowohl von einer Ebene als von einer geraden Linie erworben, oder vielmehr es wird leicht sein, jeder eintretenden Dunkelheit sofort wieder durch Hinweisung auf die krumme Fläche so wie die krumme Linie

zu Hülfe zu kommen; dagegen eine schulgerechte Definition ist hier keineswegs ein so dringendes Bedürfniß, wie manche Lehrbücher möchten glauben machen. Bekanntlich sind alle Versuche zur Aufstellung einer Definition der geraden Linie, so wie der Ebene, bis jetzt noch an der Angabe der differentia specifica gescheitert, da über das genus proximum kein Zweifel sein kann; was man gegeben hat, das definirt entweder idem per idem (z. B. wenn die gerade Linie dadurch entstanden sein soll, daß ein Punkt stets in der nämlichen Richtung, d. i. in der nämlichen geraden Linie, sich bewegt), oder es giebt von dem zu definirenden Objecte nur ein einzelnes Merkmal an (z. B. wenn man von der geraden Linie aussagt, sie sei die kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten, oder sie sei durch zwei Punkte vollständig bestimmt; oder von der Ebene, sie sei diejenige Fläche, in welcher nach allen Richtungen sich gerade Linien ziehen lassen u. dgl.). Dergleichen mangelhafte Definitionen, die man immerhin bei vorkommenden Gelegenheiten schon in den Vorübungen zur Sprache bringen mag, sollen dagegen aus einer Darstellung der Geometrie als einer Wissenschaft, so wie sie hier beabsichtigt wird, vollständig verbannt bleiben, und man kann die sehr verbreitete Unsitte nicht hart genug tadeln, welche alles, was an Definitionen jener Art sich auftreiben läßt, im Eingange des Lehrbuches chaotisch bunt durch einander gestellt dem Schüler darbietet. Muß denn durchaus alles Wissen ohne Barmherzigkeit an den Schüler gebracht werden? Wie nach Schiller den Meister des Stils, so erkennt man nicht minder den Meister in der Abfassung eines Lehrbuchs, freilich in etwas anderem Sinne, auch an dem „was er weise verschweigt.“

Der thatsächliche Mangel einer erschöpfenden Definition der geraden Linie wie der Ebene hat aber sogleich eine höchst wichtige Folge, deren bestimmte Auffassung und Anerkennung für das

Verständniß des Nachfolgenden von dem größten Belange ist. Wenn nämlich die Geometrie nun wirklich dazu übergeht, die schon oben angezeigten drei möglichen Combinationen zu zweien aus den dargebotenen Elementen, nämlich 1) Gerade und Gerade, 2) Gerade und Ebene, 3) Ebene und Ebene, herzustellen, so wird sie sich außer Stande befinden, sämmtliche dabei eintretenden Erscheinungen aus den Definitionen der geraden Linie und der Ebene zu begründen, weil diese Definitionen eben fehlen; ein Theil dieser Erscheinungen wird vielleicht als nothwendige Folge anderer sich nachweisen lassen, aber man wird im Voraus erwarten dürfen, daß es ein Residuum von Erscheinungen geben wird, welche, indem sie sich auf den Begriff der Geraden und der Ebene zu berufen scheinen, wegen mangelnder Definition dieser Begriffe keiner weiteren Nachweisung durch Räsonnement fähig sind. Diese Erscheinungen machen den Gegenstand der geometrischen Grundsätze oder Axiome aus, und es ist hierin zugleich das Mittel ausgesprochen, sämmtliche Grundsätze der Geometrie systematisch, mithin vollständig zu produciren. Dagegen sobald die Entwickelung zu den Combinationen zu drei und mehreren Elementen fortschreitet, so darf kein neues Axiom mehr vorkommen; denn da jede dieser Combinationen nichts weiter ist als eine mehrfache Wiederholung von Combinationen zu zwei Elementen, die Eigenschaften dieser letztern aber bis dahin bereits in klaren Aussprüchen vollständig vorliegen, so muß das Räsonnement auch im Stande sein von hier aus selbständig und ohne alle fremde Beihülfe alle in den Combinationen zu drei und mehr Elementen eintretenden Erscheinungen nachzuweisen und zu begründen. Es kann vielleicht die Herbeiziehung fremder Hülfe unter der Form eines Axioms der Einfachheit und Kürze einer Herleitung förderlich sein, wozu mehr als ein Beispiel sich nennen

ließe*); aber dergleichen Einmischungen sind niemals nothwendig und müssen ferngehalten werden, wenn nicht die Geometrie des Charakters einer selbständigen Wissenschaft sofort verlustig gehen soll.

Die Frage, woher die Axiome ihre Begründung zu nehmen haben, führt nun sogleich weiter zu der berühmten „Evidenz" der mathematischen Grundsätze; denn es scheint vielfach die Meinung zu herrschen, man habe unter einem Grundsatze einen Satz zu verstehen, dessen Richtigkeit so unmittelbar einleuchtend sei, daß er keines weiteren Beweises bedürfe. Wäre dies nämlich der Fall, so würde es eine zahllose Menge von Grundsätzen geben; denn Sätze wie z. B. „Eine Linie aus der Spitze nach der Mitte der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks gezogen steht auf der letzteren rechtwinklig," oder „Die gegenüberliegenden Seiten eines Parallelogramms sind gleich groß," und andere, sind offenbar so unmittelbar evident, daß der Lehrer nicht selten den größeren Theil seiner Arbeit darauf zu verwenden hat, seinen Schülern nur erst die Nothwendigkeit eines Beweises begreiflich zu machen. Man darf ohne Uebertreibung behaupten, daß derjenige Lehrer den Zweck des mathematischen Unterrichts gänzlich verkennen würde, der bei dem Beweise derartiger Sätze etwa darauf ausgehen wollte, den Schüler erst durch den Beweis zur Einsicht in die Richtigkeit des Satzes zu führen. Vielmehr kommt hier alles auf die Art und Weise an, die Erkenntniß von

*) Wenn man z. B., wie häufig geschieht, den Satz: „Die gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten," als Grundsatz hinstellt, so folgt daraus sehr einfach die bekannte Eigenschaft des Dreiecks, daß die Summe zweier Seiten eines Dreiecks stets größer ist als die dritte Seite. Aber in der Zulassung jenes Satzes als eines Grundsatzes wird das Gesetz der Sparsamkeit verletzt, welches bei der Aufstellung der Grundsätze maßgebend sein soll; denn der Satz läßt sich beweisen, obwohl in voller Allgemeinheit erst auf einer späteren Stufe der Geometrie.

Wahrheiten auf die Erkenntniß anderer, vorangegangener Wahrheiten zurückzuführen und durch diese zu begründen, wobei man mithin schließlich einmal bei Sätzen wird Halt zu machen haben, welche, wenn nicht ein regressus in infinitum zum Vorschein kommen soll, als der Begründung nicht weiter bedürftig müssen angenommen werden. Ein Grundsatz ist demnach lediglich ein Satz, den man als Ausgangspunkt für eine Reihe von Betrachtungen willkürlich zum Grunde legt (daher der Name), ohne nach seiner Begründung weiter zu fragen; den man also nicht beweist, weil er in der Reihe der Sätze der erste seiner Art ist und mithin vorangegangene Sätze, auf die der Beweis nothwendig sich würde zu beziehen haben, fehlen; mit dessen Richtigkeit oder Unrichtigkeit demnach das ganze System der daraus gefolgerten Sätze zugleich steht oder fällt. Dagegen die Evidenz ist niemals ein nothwendiges und ursprüngliches Prädikat eines Grundsatzes. So ist z. B. das Gesetz der Trägheit für die Mechanik ein Grundsatz im vollen Sinne des Worts, und alle darauf sich basirenden Sätze der Mechanik gelten nur unter der Voraussetzung dieses Grundsatzes, dem noch niemand hat unmittelbare Evidenz zusprechen wollen; so ist ferner das berühmte 11. Axiom Euklids von der unmittelbaren Evidenz viel weiter entfernt als die beiden vorhin beispielsweise angeführten geometrischen Lehrsätze, und so hat man denn auch in der That den Versuch gemacht nachzusehen, wie die Geometrie unter der Voraussetzung der Unrichtigkeit jenes Grundsatzes sich gestalten müsse, wodurch zugleich indirect die Unstatthaftigkeit, jenen Grundsatz für evident auszugeben, ihre Bestätigung findet.

Es muß hieraus zur Genüge klar geworden sein, daß innerhalb der Wissenschaft nach der Richtigkeit oder Unrichtigkeit ihrer Grundsätze, und folglich auch nach der Evidenz derselben,

niemals Frage sein kann, welche Evidenz vielmehr allein auf die Folgerichtigkeit der Schlüsse sich zu beziehen hat; dagegen erhebt diese Frage sich sofort da, wo es um die Anwendung der Wissenschaft auf irgend ein concretes Erscheinungsgebiet sich handelt, und von dem Standpunkte der Anwendungen betrachtet erscheint jeder Grundsatz der Wissenschaft nur wie eine Hypothese, deren Zulässigkeit für den einzelnen concreten Fall jedesmal erst noch in Frage kommt. Allerdings ist die Speculationslust nicht so groß, daß etwa jemand im Ernst einen entschieden unrichtigen Satz zum Grundsatze d. h. zum Ausgangspunkt für eine daran zu knüpfende Kette von Folgerungen wählen, und diese sodann für eine Wissenschaft ausgeben möchte; daraus aber folgt nichts weiter, als daß die Rücksichtnahme auf die Anwendbarkeit einer Wissenschaft die Forderung einschließt, die Wissenschaft habe bei der Aufstellung ihrer Grundsätze jederzeit zugleich in die Sphäre ihrer Anwendungen einen Blick zu werfen, um diesen gemäß ihre Axiome zu bilden. Von einer sogenannten inneren Anschauung dagegen, welche der Evidenz der mathematischen Axiome unmittelbar gewiß zu sein vorgiebt, gestehe ich keinen Begriff zu haben, oder vielmehr ich kann darin nur ein Wort erkennen, welches das in Rede stehende Problem, statt es zu erklären, vielmehr zudeckt. Umgekehrt aber wird man bei jeder bestimmten Anwendung irgend einer abstracten Wissenschaft immer zuvor nachzusehen haben, ob auch alle Grundsätze dieser Wissenschaft in dem vorliegenden Erscheinungsgebiete sich bestätigt finden, weil nicht eher von einer Anwendung wirklich die Rede sein kann; und überhaupt wird die Anwendungssphäre irgend einer Wissenschaft stets nur so weit reichen, wie Erscheinungsgebiete sich nachweisen lassen, in denen die Grundsätze dieser Wissenschaft sich bestätigt finden. Es ist eine übereilte und durch Schuld der vorgeblichen innern Anschauung zu Tage geförderte Behauptung,

die Mathematik sei einer allgemeinen Anwendung auf Größen fähig; eine Behauptung, welche niemals anders als durch eine unvollständige Induction nachgewiesen werden kann, der mithin zur Erlangung vollständiger Gewißheit noch immer ein Residuum zu wünschen übrig bleibt. Man könnte sogar bestimmte Thatsachen anführen, welche gegen eine allgemeine Anwendbarkeit der Mathematik sprechen. Die Arithmetik z. B. beruhet, wie ich durch mein Lehrbuch der Arithmetik zu zeigen versucht habe, auf dem einzigen Grundsatze, daß die Ordnung der Theile einer Summe auf die Summe selbst ohne Einfluß ist. Denkt man sich nun eine Untersuchung betreffend die Kugel, wozu ich zur Fixirung der Begriffe die Erdkugel wählen will, so angelegt, daß bei der Bestimmung der geographischen Position der Oerter der Erdoberfläche Längengrade und Breitengrade stets in eine und die nämliche Summe hineingehen, so wird offenbar von dem gegebenen Nullpunkte aus durch Aneinanderreihung gegebener Längen- und Breitengrade immer einerlei Punkt der Oberfläche erreicht, in welcher Ordnung man auch dieses Aneinanderreihen ausführen mag; d. h. es ist hinsichtlich des festzulegenden Punktes gleichgültig, ob man zuerst sämmtliche Längen- und dann die Breitengrade, oder zuerst sämmtliche Breiten- und dann die Längengrade, oder zuerst nur einen Theil der Längen- oder Breitengrade rc. rc. setzt, womit nur der Weg, also der Gang der Operation jedesmal ein anderer wird, das Resultat aber dasselbe bleibt. Führt man dagegen statt der Grade Meilen als Einheiten ein, nämlich sowohl Meilen der Länge als Meilen der Breite, so hört jene Identität des Resultats bei geänderter Ordnung der Theile sofort auf, indem nur noch ein Parallelkreis des Aequators als geometrischer Ort des festzulegenden Punktes sich nachweisen läßt; mithin ist hier das oben ausgesprochene Axiom der Arithmetik verletzt, und folglich kann auf Unter-

suchungen dieser Art die thatsächlich vorhandene Arithmetik nicht angewandt werden. Liebhaber der inneren Anschauung mögen sehen, wie sie diesen Fall nach ihrer Weise sich zu deuten haben.

Ich kehre zu den Grundsätzen der Geometrie zurück. Obgleich nämlich in der That jede Wissenschaft nur Einen Grundsatz enthalten sollte, welcher, insofern er in der Kette der Entwickelungen den Anfangspunkt bildet, einer Nachweisung und Begründung innerhalb der Wissenschaft selbst nicht weiter fähig sein kann*), so hat sich dennoch schon oben der Grund gezeigt, weshalb man in der Geometrie schon im Voraus mehr als einen Grundsatz erwarten darf. Dieser Grund bestand in dem Mangel einer Definition der geraden Linie so wie der Ebene, und man kann geradezu behaupten, daß dieser Mangel eben durch jene Grundsätze wieder ausgeglichen wird, so daß in dem Inbegriffe der geometrischen Grundsätze, zwar nicht der Form, aber dem Wesen nach, die Definitionen der geraden Linie und der Ebene selbst enthalten sind. Ferner hat sich oben ergeben, daß die Grundsätze der Geometrie vollständig müssen aufgefunden werden können, wenn man nur die binären Combinationen aus den Elementen: „Gerade" und „Ebene", erschöpfend durchgeht, da alle Combinationen zu drei und mehr Elementen immer wieder auf jene sich müssen zurückführen lassen. Insbesondere liefert die erste Combinationsform, Gerade und Gerade, zwei Grundsätze, welche weiter unten werden entwickelt werden; denn daß bei derjenigen Lage zweier Geraden

*) Ob es eine Wissenschaft ohne Grundsatz geben könne, in welcher mithin der Anfangssatz in der Kette der Entwickelungen allein aus dem Begriffe dessen, was der Wissenschaft gegeben ist, müßte demonstrirt werden können, das lasse ich hier füglich unerörtert, obschon Erhebliches sich dagegen einwenden ließe. Die Philosophie freilich macht Anspruch darauf, eine solche Wissenschaft zu sein.

im Raume, wo dieselben einander weder parallel sind noch durchschneiden, kein neuer Grundsatz mehr hinzutritt, daran brauche ich hier nur wie an eine bekannte Thatsache zu erinnern. Ein dritter Grundsatz stellt sich ein bei der Combinationsform: Gerade und Ebene; derselbe mußte schon oben bei Aufstellung der Aufgabe der Planimetrie kurz angezeigt werden, weil auf ihm erst die Möglichkeit der Planimetrie beruht. Ein vierter Grundsatz endlich ergiebt sich aus der Combinationsform: Ebene und Ebene, und ich will denselben, obgleich er meinem gegenwärtigen Zwecke fern liegt, dennoch hier anführen, weil ich ihn durchschnittlich in den geometrischen Lehrbüchern vermißt habe. Er lautet: „Wenn zwei Ebenen ohne zusammenzufallen einen Punkt mit einander gemein haben, so gehört ihnen immer auch eine durch diesen Punkt gehende Linie gemeinsam an.“ (Daß diese Linie überdies eine gerade Linie sein muß, läßt sich hinterher sehr leicht nachweisen.) — Auf diesen hier nur historisch aufgezählten vier Grundsätzen beruhet demnach die gesammte Geometrie. Ob die Zahl dieser Grundsätze sich nicht noch verringern lasse, das könnte man vielleicht zum Gegenstande einer Streitfrage machen, die ich indessen für meine Person bereits als entschieden betrachten muß.

Nach diesen Vorbemerkungen wende ich mich nun zu der Sache selbst, nämlich der genetischen Entwickelung der Anfänge der Planimetrie, folgend den Weisungen des oben ausgesprochenen Princips derselben. Um dabei Figuren entbehrlich zu machen, werde ich mit A, B, C 2c. unbegrenzte Gerade, so wie mit AB, AC 2c. die Durchschnittspunkte dieser Geraden, oder auch, je nach Bedürfniß, die von ihnen eingeschlossenen Winkel bezeichnen. Da ich hier nicht für Anfänger schreibe, so hoffe ich die bei solcher Bezeichnung sonst leicht möglichen Dunkelheiten schon vermeiden zu können.

I. Zwei Gerade in einer Ebene.

1. Daß man in eine gegebene Ebene stets eine gerade Linie hineinlegen, und daß man diese in ihr beliebig drehen könne, davon ist bereits oben Erwähnung geschehen, und auf diese beiden Grundoperationen müssen auch späterhin alle zusammengesetzten Constructionen der Geometrie zurückführbar sein. Beide Operationen für sich allein aber (zu deren Realisirung im sinnlichen Raume, wie bekannt, das Lineal und der Zirkel dienen) bieten für die Planimetrie noch keinen Stoff zur Betrachtung dar; vielmehr muß mindestens noch eine zweite gerade Linie hinzugezogen werden, damit Relationen unter Linien zum Vorschein kommen können.

Sind nun A und B zwei gegebene Gerade, welche in die gegebene Ebene hineingelegt und daselbst in allen möglichen Relationen untersucht werden sollen, so wird es der Allgemeinheit der Untersuchung nicht schaden, wenn man die eine der beiden Geraden, A, als festliegend betrachtet und nur die andere, B, vermöge der angegebenen beiden Grundoperationen in alle möglichen Lagenänderungen zu bringen sucht. Um ferner von einem bestimmten und jederzeit leicht herzustellenden Falle auszugehen, lege man B durch einen nach Willkür gewählten Punkt der Geraden A. Man sagt in diesem Falle, die beiden Geraden A und B durchschneiden einander; den Punkt AB nennt man ihren Durchschnittspunkt.

Anfänger sind wiederholt darauf aufmerksam zu machen, daß die geraden Linien hier stets als unbegrenzt gedacht werden müssen; denn für jede bestimmte Begrenzung müßte zuvor ein Grund sich eingefunden haben. In dem hier vorliegenden Falle des Durchschneidens zerfallen aber die beiden unbegrenzten Geraden in vier einseitig-unbegrenzte Gerade, oder in vier von dem Punkte AB ausgehende Strahlen, von denen zwei und zwei

sich wieder zu einer vollständig unbegrenzten Geraden zusammensetzen.

2. Unter den mannigfaltigen Lagen, welche die Gerade B gegen die Gerade A annehmen kann, verdient nun zuerst*) die Gruppe derjenigen betrachtet zu werden, welche bei ungeänderter Lage des Durchschnittspunktes AB stattfinden. Man wird demnach die Gerade B um diesen Durchschnittspunkt zu drehen, und nachzusehen haben, was sich dabei einstellt.

Da man bei dieser Drehung die ganze Gerade B, weil sie unbegrenzt ist, nicht im Auge behalten kann, so achte man vorläufig auf einen einzelnen von AB verschiedenen Punkt derselben. Alsdann ergibt sich sogleich bei der Verfolgung des Weges, welchen dieser Punkt nimmt, als ein besonders ausgezeichneter Fall derjenige, wo dieser Punkt zugleich in die Gerade A hineinfällt; in diesem Falle haben also beide Geraden zwei Punkte mit einander gemein, und wenn man nun auch ihre übrigen Punkte neben einander verfolgt, so hat man den

Ersten Grundsatz: „Wenn zwei Gerade zwei Punkte mit einander gemein haben, so fallen sie ihrer ganzen Erstreckung nach zusammen (sie decken einander)."

Nach dem, was ich oben aus einander gesetzt, würde es keinen Sinn haben, nach einem Beweise dieses Satzes zu fragen; vielmehr ist derselbe lediglich anzusehen als feststellend ein Merkmal des Begriffs der geraden Linie, welches Merkmal indessen, wie sich weiter unten zeigen wird, diesen Begriff noch nicht erschöpft. Die Geometrie läßt es gleichsam dahingestellt sein, ob der Begriff der geraden Linie vielleicht auch so sich fassen lasse, daß er das genannte Merkmal ausschließt; sie selbst aber fordert von dem Begriffe der geraden Linie, so wie sie ihn voraussetzt, dieses Merkmal, und in allen Anwendungen der

*) Der correspondirende zweite Fall findet sich in 8.

geometrischen Untersuchungen über gerade Linien ist demnach immer zuvor erst nachzusehen, ob auch das genannte Merkmal, d. h. der so eben ausgesprochene Grundsatz, sich bestätigt findet.

3. Hätte man vor der Vornahme derjenigen Drehung, welche den so eben ausgesprochenen Grundsatz hervorgehen ließ, nicht nur in der beweglichen Geraden B, sondern auch in der festen Geraden A einen von AB verschiedenen Punkt vorher willkürlich festgestellt, so würde man im allgemeinen nicht erwarten dürfen, daß beide Punkte jemals zusammenfallen müßten. Man erkennt indessen leicht, daß da, wo ein solches Zusammenfallen eintritt, sich der Begriff von gleichen Längen erzeugt, so wie im entgegengesetzten Falle die Begriffe von größeren und kleineren Längen.

Man zieht hieraus das bekannte Verfahren, zwei gegebene begrenzte Gerade in Bezug auf die Gleichheit oder Ungleichheit ihrer Länge zu untersuchen. Auch die Begriffe von Summen und Differenzen von Längen ergeben sich daraus ohne Mühe.

4. Wenn man den bis hieher betrachteten Fall der Deckung der beiden Geraden A und B ausschließt, so bleibt noch immer eine Mannigfaltigkeit von Lagen übrig, welche die beiden Geraden unter Beibehaltung des Durchschnittspunktes AB annehmen können. Es liegt nahe, damit man zu einer bequemen Uebersicht dieser Mannigfaltigkeit gelange, die beiden Geraden vorläufig im Punkte AB als abgebrochen zu betrachten, d. h. sich bloß auf zwei von AB ausgehende einseitig-unbegrenzte Gerade oder Strahlen A und B zu beschränken. Den durch beide abgegrenzten Theil der unbegrenzten Ebene nennt man einen Winkel, die beiden Strahlen A und B selbst seine Schenkel, den Punkt AB seinen Scheitelpunkt.

Wird nun der drehbare Schenkel B in Bezug auf den festen Schenkel A in Bewegung gesetzt, so gelangt man sofort

zu den Begriffen von größeren und kleineren Winkeln, so wie von Summen und Differenzen von Winkeln. Der Begriff von Gleichheit unter Winkeln kann dagegen erst zum Vorschein kommen, wenn man die winkelerzeugende Operation an verschiedenen Stellen der gegebenen Ebene d. h. in zwei Exemplaren ausgeführt denkt; lassen alsdann die dadurch entstandenen Winkel sich so auf einander legen, daß, wenn Scheitelpunkt auf Scheitelpunkt und der eine Schenkel auf den einen Schenkel fällt, auch der andere Schenkel mit dem anderen Schenkel zur Deckung gelangt (in welchem Falle, wie sich leicht nachweisen läßt, auch die zwischen den Schenkeln enthaltenen Theile der Ebene vollständig zusammenfallen), so decken die Winkel einander und heißen gleich groß; im entgegengesetzten Falle aber ungleich, der eine größer, der andere kleiner.

5. Die Winkelerzeugung hat das Eigenthümliche, daß sie vollständig zum Abschlusse kommt, wenn der drehbare Schenkel B eine volle Umdrehung gemacht hat, mithin wieder mit dem festen Schenkel A zusammenfällt. Der entstandene Winkel ist in diesem Falle einerlei mit der gegebenen Ebene, und bietet damit eine natürliche Einheit zur Winkelmessung dar.

Wird der drehbare Schenkel B nur bis dahin fortbewegt, wo er als Verlängerung des festen Schenkels A erscheint, so hat man den geraden Winkel. Man erkennt sogleich (durch die vorhin angezeigte Deckung), daß derselbe seiner Ergänzung zu einer vollen Umdrehung gleich, und mithin die Hälfte der vollen Umdrehung ist. Daran schließen sich die Begriffe von hohlen und erhabenen Winkeln.

Wird der drehbare Schenkel B nur bis dahin fortbewegt, wo der entstandene Winkel seiner Ergänzung zu einem geraden Winkel gleich ist (welches gleichfalls durch Deckung erkannt wird), so hat man den rechten Winkel $= R$. Der rechte Winkel

ist demnach der vierte Theil der vollen Umdrehung, welche letztere mithin durch 4 R, so wie der gerade Winkel durch 2 R bezeichnet werden kann. An den rechten Winkel lehnen sich die Begriffe von *spitzen* und *stumpfen Winkeln*, so wie von *Perpendikeln* und *geneigten Linien*.

Beiläufig mag hier noch der Winkelmessung durch Grade, Minuten und Secunden gedacht werden.

6. Zugleich mit der Winkelbeschreibung entsteht, indem man, wie in 2., statt des ganzen drehbaren Schenkels B nur einen beliebigen und von AB verschiedenen Punkt desselben im Auge behält, der Begriff einer mit einem beliebigen *Halbmesser* beschriebenen *Kreislinie*, welche bei voller Umdrehung zu einem vollständigen *Kreise* wird. Durch seine Abschließung in sich selbst erscheint der Kreis als eine von der geraden Linie verschiedene Linienform, mithin als erstes Beispiel einer krummen Linie, welche durch den genommenen Entwickelungsgang auf dem Boden der Geometrie selbständig zu Stande gekommen ist.

Erklärung von *Mittelpunkt*, *Durchmesser*, *Umfang*, *Bogen*.

Der Kreisbogen, zwischen den Schenkeln eines Winkels aus dem Scheitelpunkte desselben, als Mittelpunkt, mit einem festgesetzten Halbmesser beschrieben, bietet sich sogleich als ein bequemes Mittel dar, um sich die Größe eines Winkels exact zu veranschaulichen. Denn da bei der Deckung zweier Winkel auch die auf die angegebene Weise zwischen ihren Schenkeln construirten Kreisbögen zusammenfallen, wenn nur jedesmal der nämliche Halbmesser gewählt worden war, und da ferner unter gleichen Voraussetzungen der Summe zweier Winkel die Summe ihrer Kreisbögen, der Differenz zweier Winkel die Differenz ihrer Kreisbögen zugehört, so kann der Kreisbogen überall, wo es zweckmäßig erscheint, als Repräsentant des Winkels angesehen

und die Vergrößerung oder Verkleinerung des Kreisbogens für diejenige des Winkels an die Stelle gesetzt werden. So entspricht dem geraden Winkel der Halbkreis, dem rechten Winkel der Viertelkreis, dem Grade der 360. Theil des Kreisumfanges u. s. f.

7. Hebt man jetzt die in 4. gestellte Beschränkung, die beiden sich durchschneidenden Geraden A und B vorläufig im Punkte AB als abgebrochen zu betrachten, wieder auf, und verlängert zuerst die Gerade A rückwärts über AB hinaus, so erhält man zu dem hohlen Winkel AB seinen Nebenwinkel, der mit jenem, laut Definition des geraden Winkels, die Summe 2 $\mathfrak{R}$ ausmacht.

Verlängert man zweitens auch die Gerade B rückwärts über den Punkt AB hinaus, so lassen sich die vier um AB entstehenden hohlen Winkel zu vier Paaren von Nebenwinkeln zusammenstellen; und bezeichnet man diese Winkel der Reihe nach durch die Buchstaben α, β, γ, δ, so erhält man die vier Summen

$$\alpha+\beta,\quad \beta+\gamma,\quad \gamma+\delta,\quad \delta+\alpha,$$

von denen jede 2 $\mathfrak{R}$ beträgt. Diese vier Summen sind demnach auch unter einander gleich, und vergleicht man irgend zwei derselben, die einen gemeinschaftlichen Winkel enthalten, z. B. $\alpha+\beta=\beta+\gamma$, und läßt den gemeinschaftlichen Winkel, hier β, fort, so hat man das bekannte Theorem über Scheitelwinkel.

8. Anknüpfend an 2. wird man jetzt noch diejenige Mannigfaltigkeit in der Lage der Geraden B gegen die feste Gerade A zu betrachten haben, welche sich ergiebt, wenn nicht mehr der Durchschnittspunkt AB als unveränderlich beibehalten werden soll. Dazu aber bleibt nach Maßgabe der in 1. aufgestellten Grundoperationen kein anderer Weg als die Drehung der Geraden B um einen von dem Durchschnittspunkte AB ver-

schiedenen, jedoch noch in ihr selbst enthaltenen Punkt. Es sei M ein solcher Punkt der Geraden B, verschieden von AB; man drehe um denselben die Gerade B, und sehe nach, was sich dabei einstellt.

Verfolgt man die Lage des Durchschnittspunktes AB, der bei der angegebenen Drehung augenscheinlich seinen Platz verlassen muß, so wird derselbe offenbar auf der festen Geraden A nach der einen oder der andern Seite hin fortrücken müssen, je nachdem man die Gerade B in dem einen oder dem andern Sinne um M drehet. Welche Lage aber auch der Punkt AB annehmen mag, so ist damit noch immer keine neue Configuration entstanden, sondern stets nur wieder die schon betrachtete Verbindung von zwei sich durchschneidenden geraden Linien. Indessen wenn man für den Augenblick einen bestimmten Drehungssinn beibehält, und nun die Ueberlegung macht, daß mit dem Beginn der Drehung der Punkt AB anfängt auf A fortzurücken, daß er dieses Fortrücken auf A nach einerlei Seite hin über alle Grenzen hinaus fortsetzt, daß er aber nach Zurücklegung einer bestimmten Größe der Drehung plötzlich anfängt sich auf der entgegengesetzten Seite der Geraden A zu zeigen, um nach Vollendung einer Drehung von 2 R in seine ursprüngliche Position zurückzukehren: so erkennt man leicht in jener Uebergangsstelle — wo nach der einen Seite hin die Durchschnittspunkte aufhören, um nach der entgegengesetzten Seite hin wieder anzufangen — denjenigen Ort, welcher zu einer neuen Lagenbestimmung unter zwei geraden Linien führen muß. Ohne in die Details dieses Falles tiefer hineinzugehen, gelangt man leicht zu dem Begriffe zweier Parallelen, oder solcher Geraden in einer Ebene, die keinen Punkt mit einander gemein haben (so weit man sie auch verlängern mag), so wie zu dem

Zweiten Grundsatz: „Wird von zwei Parallelen die

eine durch Drehung um einen beliebig in ihr angenommenen Punkt aus ihrer Lage gebracht, so muß sie nothwendig die andere durchschneiden."

Dieser Grundsatz ist wiederum anzusehen als feststellend ein Merkmal des Begriffes der geraden Linie, welches in dem ersten Grundsatze noch nicht enthalten war, so wie im Uebrigen von ihm wieder genau dasselbe gilt, was oben von dem ersten Grundsatze gesagt worden ist. Beide Grundsätze zusammengenommen bieten, so weit die Planimetrie dessen bedarf, den Ersatz für die fehlende Definition der geraden Linie.

Erklärung von Convergenz und Divergenz, und von einem Streifen (dem von zwei Parallelen begrenzten Theile einer Ebene). Gleichheit und Ungleichheit von Streifen, durch Deckung zu erkennen ebenso wie die Gleichheit und Ungleichheit von Winkeln; Summen und Differenzen von Streifen.

Da vermöge des zuletzt aufgestellten Grundsatzes der Begriff der Parallelen jede Mannigfaltigkeit von Fällen (etwa wie oben beim Durchschneiden zweier Geraden) ausschließt, so ist hiemit zugleich die Aufsuchung sämmtlicher Lagenbeziehungen zweier Geraden in einer Ebene beendigt.

II. Drei Gerade in einer Ebene.

9. Durch die vorhergehende Betrachtung der gegenseitigen Lage zweier geraden Linien in einer Ebene haben sich die drei Begriffe der Deckung, des Durchschneidens und des Parallelismus als diejenigen Hauptbegriffe herausgestellt, unter welche die Lage von zwei Geraden in einer Ebene stets muß gebracht werden können, und diese Begriffe werden deshalb auch stets da wiederkehren, wo es sich um die Lage von mehr als zwei geraden Linien handelt. Indessen sobald man darauf ausgeht wirklich neue Fälle herbeizuführen, so ist sogleich klar,

daß der Begriff der Deckung ausgeschlossen werden muß, weil zwei oder mehrere Gerade, indem sie in eine einzige Gerade zusammenfallen, damit jedesmal die Gesammtzahl der vorhandenen Geraden auf eine geringere reduciren d. h. auf einen Fall, welcher in der hier vorausgesetzten Reihenfolge der Betrachtungen schon vorher muß dagewesen sein. Es bleiben also der Parallelismus und das Durchschneiden als die beiden Hauptformen für die Lage zweier Geraden übrig, als nothwendig und zugleich hinreichend für den weiteren Verfolg der Planimetrie; die Deckung dagegen wird nur da noch in Betracht kommen, wo sie durch den Lauf der Untersuchung als unabweisbar sich von selbst einstellt.

Anknüpfend an das Frühere ergeben sich hier mithin sogleich die beiden Forderungen: „Zu zwei gegebenen Parallelen so wie zu zwei gegebenen Schneidenden eine dritte Gerade, sei es als Parallele oder als Schneidende hinzuzufügen.“ Man gewinnt daraus von der Lage von drei Geraden in einer Ebene folgende vorläufige Uebersicht:

1) Drei Parallele,
2) Zwei Parallele und eine Schneidende,
3) Drei Schneidende.

Oder, wenn man nach der Anzahl der gemeinschaftlichen Punkte ordnet, so können drei Gerade in einer Ebene mit einander gemein haben: keinen, einen, zwei oder drei Punkte.

10. Gegeben seien zwei Parallele A und B, und eine dritte Gerade C trete hinzu; sodann kann diese, in ihrer Beziehung zu einer der beiden gegebenen Geraden, z. B. B, aufgefaßt, zu derselben nur entweder eine Parallele oder eine Schneidende sein, womit in Bezug auf das Zustandekommen oder Nichtzustandekommen eines Durchschnittspunktes BC sich

nur Bekanntes wiederholt. Eine neue Frage ist aber, welche Relation dadurch unter C und A gesetzt worden ist.

Gesetzt 1) es sei C parallel zu B und zugleich durch irgend einen Punkt der Geraden A geführt; dann müssen vermöge des 2. Grundsatzes C und A einander decken. Hier entsteht mithin eine schon früher dagewesene Figur.

Gesetzt 2) es sei C parallel zu B und zugleich durch einen außerhalb der Geraden A liegenden Punkt geführt, dann muß vermöge des 2. Grundsatzes C auch parallel zu A sein. Hier entstehen drei einander paarweise parallele Gerade.

Gesetzt 3) es schneide C die Gerade B; dann wird sie vermöge des 2. Grundsatzes auch die Gerade A schneiden müssen. Hier entstehen zwei Parallelen von einer dritten Geraden durchschnitten.

Dieser letzte Fall — zwei Parallelen von einer dritten Geraden durchschnitten — kann zwar zugleich schon die Frage nach der relativen Größe der vier Winkel in AC zu den vier Winkeln in BC veranlassen, woran sich die bekannten Definitionen von Wechselwinkeln, Innenwinkeln und Gegenwinkeln lehnen; indessen ergiebt sich der natürliche Weg zur Aufstellung und Erledigung dieser Frage erst durch die nächstfolgende Betrachtung.

11. Gegeben seien zwei Schneidende A und B, und eine dritte Gerade C solle hinzutreten; dann ist schon aus dem Vorhergehenden bekannt, daß diese C nicht beiden gegebenen Geraden zugleich parallel sein kann, sondern nothwendig mindestens eine von ihnen, z. B. A, schneiden muß. Die Frage wird sodann lediglich darauf gerichtet sein, unter welchen Bedingungen auch die andere Gerade, hier B, von C geschnitten werde oder nicht.

Offenbar wird, wenn C die Gerade A genau im Punkte AB schneidet, zugleich auch C die Gerade B entweder schneiden, oder decken. Welches von beiden geschieht, das wird von der

Beschaffenheit der Winkel in AC verglichen mit denen in AB abhängen,*) d. h. es wird Letzteres — Deckung — eintreten, wenn entweder diejenigen Winkel als gleich vorausgesetzt worden sind, welche in Folge dieser Deckung zusammenfallen; oder diejenigen Winkel als gleich, welche in Folge dieser Deckung Scheitelwinkel werden; oder diejenigen Winkel als einander zu 2 R ergänzend, welche in Folge dieser Deckung Nebenwinkel werden: von welchen drei Voraussetzungen jede wieder die beiden anderen zur Folge hat. Die hier entstehende Configuration ist schon früher dagewesen. — Werden aber die genannten Voraussetzungen nicht erfüllt (welches schon eintritt, wenn nur eine von ihnen nicht erfüllt ist), so hat man drei einander in einem Punkte durchschneidende Gerade; eine Configuration, welche im Uebrigen nichts weiter darbietet als eine mehrfache Wiederholung von Nebenwinkeln so wie von Scheitelwinkeln.

12. Wenn dagegen C die Gerade A in einem von AB verschiedenen Punkte schneidet, so wird C die Gerade B entweder gleichfalls schneiden oder ihr parallel sein, indem hier die Deckung wegfällt. Die bei dieser Deckung vorhin in **11.** zusammenfallenden Winkel verwandeln sich jetzt in Gegenwinkel, die vorhin als Scheitelwinkel auftretenden Winkel in (innere oder äußere) Wechselwinkel, die vorhin als Nebenwinkel auftretenden Winkel in Innenwinkel (oder Außenwinkel). Die vorhergehende Figur in **11.**, erscheint hier gleichsam aus einander geschoben.

Nach Analogie der vorigen Untersuchung wird man auch hier zunächst nach dem Erfolge fragen, wenn man die Gegen-

*) Zu größerer Deutlichkeit kann man sich hier zwei getrennte Figuren denken, von denen die eine nur A und B, die andere nur A und C enthält, und die man zur Deckung zu bringen sucht. Aehnliches gilt im Eingange zu 12.

winkel als gleich, oder die Wechselwinkel als gleich, oder die Innenwinkel als 2 R betragend voraussetzt: von welchen drei Voraussetzungen wiederum jede die beiden anderen zur Folge hat.

Es mögen die Wechselwinkel als gleich voraus gesetzt werden; sodann nöthigt diese Gleichheit sofort, die Wechselwinkel zur Deckung zu bringen, da eben in der Möglichkeit der Deckung die Gleichheit zweier Winkel besteht. Behufs der Ausführung dieser Deckung hat man nur nöthig, die ganze Figur in zwei Exemplaren, auf einerlei Weise aus denselben Elementen entstanden, vorhanden zu denken. Alsdann zeigt sich bei der Deckung der Wechselwinkel sogleich eine vollständige Deckung der ganzen Figur, woraus man weiter auf die bekannte Weise auf den Parallelismus der Geraden B und C schließt; denn wollte man etwa den Versuch machen anzunehmen, diese Geraden hätten nach der einen Seite von A einen Punkt mit einander gemein, so müßten sie wegen jener Deckung auch nach der anderen Seite von A einen Punkt mit einander gemein haben, was dem 1. Grundsatz widerstreitet, da beide Geraden nicht zusammenfallen.

Es mögen die Gegenwinkel als gleich vorausgesetzt werden; sodann nöthigt diese Gleichheit wiederum beide Winkel zur Deckung zu bringen, wobei man ebenfalls die Figur sich in zwei Exemplaren vorhanden zu denken hat. Hier werden indessen nicht, wie vorhin, beide Figuren vollständig auf einander fallen, sondern sie kommen vielmehr an einander zu liegen, und man erkennt leicht, daß man dieses Aneinanderlegen der nämlichen Figur beliebig oft wiederholen kann, ohne daß die Summe der zwischen B und C enthaltenen Ebenentheile jemals die Ebene vollständig ausfüllen wird. Ob diese Ebenentheile aber Streifen oder Winkel seien, das hat sich bis hieher noch nicht entschieden. Gesetzt nun, die Geraden B und C schnitten einander, so würde

der von ihnen begrenzte Ebenentheil ein Winkel sein, der mithin durch das vorhergehende Verfahren unendlich oft wiederholt werden könnte ohne die Ebene zu erschöpfen; dieses widerspricht aber dem Begriffe des Winkels, von welchem sich stets eine endliche Anzahl von Wiederholungen angeben läßt, die schon über die Ebene hinausgehen. Folglich können B und C nur Parallele sein.*)

Es mögen endlich die Innenwinkel zusammen 2 R betragen, so nöthigt diese Voraussetzung sogleich beide Winkel so an einander zu legen, daß sie zu Nebenwinkeln werden, wobei man sich abermals die Figur in zwei Exemplaren vorhanden zu denken hat. Dadurch aber gelangt man, je nachdem man dies auf die eine oder die andere der beiden möglichen Arten ausführt, nothwendig wieder zu der einen oder der anderen der beiden vorhergehenden Entwickelungen, folglich auch zu demselben Resultate.

Mit Hülfe des 2. Grundsatzes erkennt man nun, daß, wenn eine der drei vorhergehenden Voraussetzungen nicht erfüllt ist (womit zugleich auch die beiden übrigen aufhören erfüllt zu sein), die Geraden B und C nothwendig einander schneiden müssen. Daraus folgt aber sofort die Möglichkeit, die hier gewonnenen Sätze umzukehren, worin sodann auch die am Schlusse von **10.** angedeutete Frage ihre Erledigung findet.

13. Wenn in der vorhergehenden Figur die Geraden B und C einander schneiden, so kommen um den Punkt BC abermals vier hohle Winkel zum Vorschein, so daß die Figur im Ganzen jetzt zwölf dergleichen aufzuweisen hat; und um auch diese in die Betrachtung hineinzuziehen, wird es nöthig sein, den

---

*) Diese Entwickelung ist dem Bertrand'schen Beweise des 11. Euklidischen Grundsatzes nachgebildet und möge hier als ein Beleg für die Fruchtbarkeit der genetischen Methode gelten, wenn man den Weisungen derselben nur ohne Bedenken Folge giebt. Man kann indessen, wenn man will, den Unterricht dahin abkürzen, daß man mit Umgehung jener Entwickelung von der Gleichheit der Gegenwinkel wieder zur Gleichheit der Wechselwinkel zu gelangen sucht.

Uebergang der Geraden B und C von Parallelismus zum Durchschneiden sorgfältiger als bisher in Erwägung zu ziehen.

Definition des Dreiecks, seiner drei Seiten und seiner drei Winkel. Letztere mögen durch α, β, γ bezeichnet werden, der Reihe nach gegenüberliegend den Seiten A, B, C (welche Buchstaben von jetzt an nicht allein für die unbegrenzten Geraden, sondern auch für die begrenzten Dreiecksseiten genommen werden sollen).

Gesetzt nun, es seien zuerst wieder die Wechselwinkel als gleich vorausgesetzt, also die Geraden B und C einander parallel. Wenn man jetzt den einen Wechselwinkel vergrößert, so werden die Geraden B und C einander schneiden müssen, und zwar nach derjenigen Seite von A hin, wo der kleinere der beiden betrachteten Wechselwinkel liegt. Die Vergrößerung aber, welche jener Wechselwinkel erfahren hat, beträgt (als Gegenwinkel) genau so viel wie der im Punkte BC gleichzeitig mit jener Vergrößerung zu Stande gekommene Winkel α, und damit hat man den bekannten Satz über den Außenwinkel eines Dreiecks.

Es seien ferner die Gegenwinkel als gleich vorausgesetzt, also die Geraden B und C einander parallel. Man vergrößere einen der beiden Gegenwinkel; dann werden diese Geraden aufhören parallel zu sein und zwar einander nach derjenigen Seite von A hin schneiden, wo der innere Gegenwinkel der kleinere ist. Vergleicht man nun mit jener Vergrößerung des einen Gegenwinkels den damit gleichzeitig im Punkte BC entstandenen Winkel α, so findet man beide (als Gegenwinkel oder Wechselwinkel, je nachdem die Figur angelegt wurde) gleich groß, und damit wieder den vorigen Satz über den Außenwinkel eines Dreiecks.

Es sei endlich die Summe der Innenwinkel gleich 2 R

angenommen, also wiederum Parallelismus unter den Geraden B und C. Verkleinert man den einen der beiden Innenwinkel, so wird ein Schneiden der Geraden B und C eintreten, und zwar nach derjenigen Seite von A hin, wo die Summe der Innenwinkel weniger als 2 R beträgt. Jene Verkleinerung aber ist wiederum (als Wechselwinkel) gleich dem damit gleichzeitig im Punkte BC zu Stande gekommenen Winkel α, und damit hat man den bekannten Satz über die Winkelsumme des Dreiecks.*)

Daß die beiden hier gewonnenen Sätze wieder unter sich im Zusammenhange stehen, das ist eine Bemerkung, die man leicht hinterher machen kann. Uebrigens schließt sich hieran sofort die bekannte Eintheilung der Dreiecke nach ihren Winkeln.

14. Wenn man um größerer Einfachheit willen von jetzt an die äußeren Winkel des Dreiecks fallen läßt und mithin nur die drei innern und eigentlichen Dreieckswinkel in Betracht zieht (denn die Abhängigkeit der erstern von den letztern hat sich bis hieher bereits zur Genüge herausgestellt), so erkennt man in dem allein hieher gehörigen letzten Falle der vorstehenden Entwickelungen ohne Mühe die Construction des Dreiecks aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln. Gegeben war die Seite A nebst dem anliegenden Winkel γ, und hinzugenommen wurde der andere anliegende Winkel β, der mit γ zusammen weniger als 2 R betrug; damit kam ohne weitere willkürliche Zuthat das Dreieck vollständig zu Stande, und mithin ist die Construction des Dreiecks aus den gegebenen Elementen jederzeit möglich und ausführbar, und es ergeben sich dabei die drei übrigen Bestandtheile des Dreiecks von selbst. Aber wenn man sich das Dreieck noch in einem zweiten Exemplare, auf

*) Man vergleiche mit der hier angedeuteten Genesis die beiden im ersten Artikel gegebenen Beweise desselben Satzes.

einerlei Weise aus denselben Elementen entstanden, vorhanden denkt, so läßt sich ohne Mühe die Deckung — Congruenz — beider Dreiecke nachweisen; mithin sind durch eine Seite und zwei anliegende Winkel eines Dreiecks stets die drei übrigen Bestandtheile desselben auch vollständig bestimmt.

Das Vorstehende kann leicht auf den gleichfalls durch das Obige motivirten Fall übertragen werden, wo statt des anliegenden Winkels β der gegenüberliegende α als gegeben angesehen, also die Construction des Dreiecks aus einer Seite nebst einem anliegenden und einem gegenüberliegenden Winkel ausgeführt werden soll.

15. Da bei dem hier in Rede stehenden Falle stets zwei Winkel als gegeben (oder, was hier dasselbe sagt, als willkürlich angenommen) angesehen werden müssen, so liegt es nahe, auf die relative Größe derselben noch einen Blick zu werfen, um nachzusehen, ob sich damit nicht etwa noch Gesetze erkennen lassen, welche der vorhergehenden allgemeinen Auffassung entgangen sind. Es wird also auf Gleichheit oder Ungleichheit*) jener beiden Winkel zu achten sein.

Es seien 1) die beiden anliegenden Winkel γ und β einander gleich; dann werden, wenn man sich wieder die Figur in zwei Exemplaren vorhanden denkt, beide Figuren wegen jener vorausgesetzten Gleichheit auch mit Vertauschung jener beiden Winkel zur Deckung gebracht werden können, d. h. man erkennt das

*) Dies sind nämlich die beiden einzigen durch das Vorhergehende (in **4.**) begründeten Größenvergleichungen unter Winkeln; ein Gleiches gilt weiterhin von den Größenvergleichungen unter Linien (nach **3.**). Man könnte zwar auch andere Größenbeziehungen unter den beiden Winkeln nach Willkür feststellen und nach dem Erfolge fragen, z. B. wenn man die Summe der beiden Winkel gleich einem rechten Winkel annimmt (s. Trendelenburg's logische Untersuchungen Band II. S. 290); jedoch unterdrücke ich dergleichen nicht durch die Nothwendigkeit gebotene Untersuchungen hier absichtlich.

Dreieck als ein gleichschenkliges. Der einzige Punkt der Seite A, welcher bei jener Vertauschung wieder seine ursprüngliche Stelle einnimmt, ist der Mittelpunkt derselben, und in der Verbindung dieses Punkts mit dem gleichfalls seine ursprüngliche Stelle wieder einnehmenden Punkte BC erkennt man unmittelbar die Halbirungslinie des Winkels α, und damit die bekannte Zerlegung des gleichschenkligen Dreiecks in zwei congruente recht-winklige Dreiecke.

Durch eine Erweiterung dieser Betrachtung erscheint das gleichwinklige Dreieck zugleich als gleichseitiges.

Es sei 2) γ größer als β; dann können diejenigen beiden Exemplare der Figur, welche man auch hier wieder anzunehmen hat, bei Vertauschung jener beiden Winkel nicht mehr zur Deckung gebracht werden. Die Analogie des vorhergehenden Falles legt es hier aber nahe,*) in beiden Dreiecken wenigstens die Halbirungslinie des Winkels α wieder zum Zusammenfallen zu bringen, woraus sodann sofort zu erkennen ist, daß dem größeren Winkel auch die größere Seite des Dreiecks gegenüberliegt.

Dies führt zu bekannten Anwendungen auf rechtwinklige und stumpfwinklige Dreiecke.

16. Rückblickend auf den bisherigen Entwickelungsgang wird man das festzuhalten haben, daß eine Drehung der Geraden C aus ihrer zu B parallelen Lage heraus erforderlich gewesen ist, damit ein Dreieck zu Stande kommen konnte. Diese Drehung wurde oben dadurch vorgezeichnet, daß man diejenige Verminderung als gegeben ansah, welche der Innenwinkel im Punkte AC zu erleiden hatte, damit ein Durchschnitt der Geraden B und C zu Stande kam; oder mit anderen Worten, man

*) Derselben Analogie zufolge würden hier noch andere Wendungen in der Entwickelung möglich sein, die ich indessen der Kürze wegen übergehe, da sie keine besonders hervortretenden Resultate liefern.

nahm zu den beiden Elementen A und γ noch entweder β, oder α, hinzu, und hatte somit die Entstehung des Dreiecks entweder aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln, oder aus einer Seite nebst einem anliegenden und einem gegenüberliegenden Winkel. Indessen da es sich, behufs der Entstehung eines Dreiecks, hier lediglich um das Zustandekommen des Durchschnittspunkts BC handelt, so liegt es auch nahe genug, diesen Punkt nicht mittelbar durch einen Winkel, wie vorhin, sondern unmittelbar durch eine in ihm selbst endigende Länge festzulegen, sei diese nun die Länge der Seite B oder die Länge der Seite C. Im ersten Falle hat man die Construction des Dreiecks aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel (A, B, γ), im zweiten Falle dagegen aus zwei Seiten und einem gegenüberliegenden Winkel (A, C, γ).

Der erste Fall als der näher liegende möge vorantreten. Man erkennt hier leicht, daß in der Wahl der Länge von B, nachdem A und γ beliebig festgestellt worden sind, gar keine Beschränkung besteht, indem jederzeit aus den Endpunkten von A und B die dritte Seite, und damit auch die Größe der beiden fehlenden Winkel, sich von selbst ergiebt. Die Construction ist mithin stets möglich. Aber wenn man die Construction aus denselben Elementen noch in einem zweiten Exemplare wiederholt, so läßt sich auch die Congruenz beider Configurationen nachweisen, mithin sind durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel eines Dreiecks die drei übrigen Bestandtheile desselben stets auch vollständig bestimmt.

17. Gleichwie in **15.** bietet auch der gegenwärtig vorliegende Fall den Anlaß dar, diejenigen beiden gegebenen Dreieckselemente, welche eine Vergleichung zulassen, hier also die beiden gegebenen Seiten A und B noch hinsichtlich ihrer relativen Größe, nämlich ihrer Gleichheit oder Ungleichheit, ins Auge zu fassen und den-

jenigen besondern Gesetzen nachzuforschen, welche sich aus dieser besonderen Betrachtung ergeben mögen.

Es seien 1) die beiden Seiten A und B gleich groß, also das Dreieck gleichschenklig; dann kann man, nach Herstellung eines zweiten Exemplares der Figur, letzteres mit der ursprünglichen Figur auch unter Vertauschung jener beiden Seiten zur Deckung bringen, woraus sich dann sofort die Gleichheit der gegenüberliegenden Winkel α und β ergiebt. Dies ist die Umkehrung von **15.** 1), und daran schließt sich ebenso wie dort die Zerlegung des gleichschenkligen Dreiecks in zwei congruente rechtwinklige Dreiecke.

Es sei 2) A größer als B; dann wird eine Deckung des zweiten Exemplars der Figur mit der ursprünglichen, unter Vertauschung jener Seiten, wobei man den eingeschlossenen Winkel γ wieder mit sich selbst zusammenfallen läßt, eine Figur zum Vorschein bringen, aus welcher ohne Mühe der bekannte Satz gezogen werden kann, daß der größern Seite des Dreiecks der größere Winkel gegenüberliegt. Dies ist die Umkehrung von **15.** 2), so wie sich dann auch die Halbirungslinie des Winkels γ hier hinterher leicht nachweisen läßt.

18. Wenn man zu den bis hieher fortwährend als gegeben angesehenen Elementen A und γ jetzt, wie schon in **16.** angezeigt wurde, die Seite C hinzunimmt und mithin darauf ausgeht, das Dreieck aus zwei Seiten und einem gegenüberliegenden Winkel zu construiren, so zeichnet sich dieser Fall sogleich dadurch vor den früheren aus, daß es hier schon von vorn herein nöthig wird, die relative Größe der beiden als gegeben anzusehenden Seiten A und C näher in Betracht zu ziehen. Denn wollte man etwa die Länge von C willkürlich als gegeben ansehen, so würde man, da über die Lage von C damit noch gar nichts festgestellt worden ist, diese Gerade um ihren festen Endpunkt

AC drehen und dabei abwarten müssen, ob ihr anderer Endpunkt auch wirklich in die unbegrenzte Gerade B hineingelange und mithin ein Dreieck unzweideutig feststelle, oder welcher besondern Beschränkung vielmehr das Eintreten dieses Falles unterliege.

Um hierüber Aufschluß zu erhalten, betrachte man vorläufig die beiden Geraden A und C noch als unbeschränkt hinsichtlich ihrer Länge, und allein an die Bedingung gebunden, stets durch den festen Punkt AC zu gehen und die feste Gerade B zu schneiden. Vergleicht man nun diejenigen Lagen, welche dabei der Punkt AB annehmen kann, mit der gleichfalls veränderlichen Lage des Punktes BC, so hat man es (falls nicht etwa beide Punkte zusammenfallen sollten) mit einem Dreieck zu thun, in welchem diejenige der beiden Seiten A und C die größere ist, welche dem größern Winkel gegenüberliegt; und durch näheres Eingehen in diese Betrachtung ergiebt sich sodann leicht, daß die kürzeste von AC nach B gezogene Gerade das Perpendikel ist, jede andere aber desto länger ausfällt, je weiter ihr Fußpunkt sich nach der einen oder der andern Seite hin vom Fußpunkte des Perpendikels entfernt.

Drei gleich lange Gerade von AC nach B kann es also nicht geben.

19. Wird nun die Seite A nebst dem Winkel γ, wie vorhin, als gegeben betrachtet, so ist damit zugleich schon das gedachte Perpendikel festgestellt, welches hier der Kürze wegen durch seinen trigonometrischen Ausdruck $A \cdot \sin\gamma$ bezeichnet werden mag. Die Seite C muß sodann mindestens so groß sein wie $A \cdot \sin\gamma$, wenn überhaupt die Gerade B den Endpunkt dieser Seite soll in sich aufnehmen können; doch reicht auch diese Grenze noch nicht in allen Fällen zur Entstehung des Dreiecks hin.

Es sei nämlich 1) γ ein stumpfer Winkel; dann weiß man schon, daß diesem stets die größte Seite des Dreiecks gegenüber-

liegt, folglich muß C größer als A sein. Daß aber unter dieser Bedingung die Construction stets möglich und ausführbar ist, so wie daß zwei aus denselben Elementen entstandene Figuren immer zur Deckung gebracht werden können und mithin durch die gegebenen Elemente auch die nicht gegebenen Bestandtheile des Dreiecks vollständig bestimmt sind, das läßt sich nun leicht nachweisen.

Es sei 2) γ ein rechter Winkel; dann hat man noch dasselbe Ergebniß.

Es sei 3) γ ein spitzer Winkel; dann ist es zwar nicht mehr nothwendig C größer als A anzunehmen; indessen wenn man für einen Augenblick, nach Analogie des Vorhergehenden, diese Beschränkung noch festhält, so findet man auch hier wieder nicht nur die Ausführbarkeit der Construction, sondern auch die Congruenz verschiedener Exemplare derselben, wie vorhin. Nimmt man C eben so groß wie A, so tritt noch dasselbe ein. Nimmt man aber C kleiner als A, wo jedoch sein Werth, dem Obigen zufolge, nicht unter denjenigen des Perpendikels $A . \sin \gamma$ hinabgehen darf, so erkennt man sogleich die Möglichkeit zweier Dreiecke aus den nämlichen gegebenen Bestandtheilen, womit in Verbindung steht, daß zwei Exemplare von Dreiecken, die beide aus jenen Bestandtheilen hergestellt sind, nicht mehr nothwendig einander decken müssen, sondern auch incongruent sein können. (Die Congruenz zweier Dreiecke, in denen zwei Seiten nebst dem der kleinern Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, läßt sich nur mit einer Wahrscheinlichkeit $= 1/2$ behaupten.) — Von diesem letzten Schlusse findet scheinbar eine Ausnahme statt, wenn C genau den Werth $A . \sin \gamma$ hat; doch wollte man dieses Falles gewiß sein, so müßte man schon vorher den Winkel α als einen rechten Winkel erkannt haben, was der Voraussetzung widerstreitet.

20. Bis hieher sind die Seiten B und C nur einzeln und nach einander zur Construction des Dreiecks hinzugezogen worden, und es läßt sich demnach jetzt noch die Frage aufwerfen, ob man nicht auch beide zugleich als gegeben zur Entstehung des Dreiecks herbeiziehen könne. Sollte sich dies ausführbar zeigen, so würde damit, so wie schon früher der Winkel β, jetzt auch der Winkel γ überflüssig gemacht werden, und man hätte alsdann die Construction des Dreiecks allein aus seinen drei Seiten.

Man weiß von oben her, daß bei der Construction des Dreiecks aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, diese drei Elemente keinerlei Beschränkung unterlagen, und man wird deshalb auch jetzt damit beginnen können, zwei beliebige gegebene Seiten A und B im Punkte AB zusammenzustellen, wobei indessen der Winkel AB vorläufig noch nicht angegeben werden kann, indem statt seiner vielmehr die dritte Seite C gegeben ist. Wie aber auch diese Seite beschaffen sein mag, so muß immer der ihr gegenüberliegende Winkel γ irgend einen Werth zwischen 0 und 2 R annehmen, und läßt man demnach γ alle diese Werthe allmälig durchlaufen, so müssen dabei zugleich alle möglichen Werthe, welche die Seite C unter Voraussetzung der Seiten A und B annehmen kann, hervorgehen.

Man betrachte zuerst die beiden äußersten Werthe von γ, für welche die Figur aufhört ein Dreieck zu sein, nämlich $\gamma = 0$ und $\gamma = 2$ R. Im ersten Falle wird die Verbindungslinie der Endpunkte der Seiten A und B gleich dem Unterschiede dieser Seiten, im andern Falle gleich der Summe dieser Seiten sein, und dies sind mithin zwei äußerste Werthe, welche die Seite C selbst niemals erreichen kann. In jedem anderen Falle dagegen, wo γ irgend ein beliebiger hohler Winkel ist, erkennt man aus der Vergleichung des zugehörigen Werths von C mit jener Summe einerseits, und mit jenem Unterschiede andererseits, durch leicht

einzusehende Schlüsse, daß die Seite C stets kleiner als die Summe und größer als der Unterschied der Seiten A und B bleibt.

Man kann noch hinzufügen, indem man den Winkel γ in zweien seiner Zustände zur Betrachtung zieht, daß dem größern Werthe von γ auch der größere Werth von C zugehört, mithin die Seite C mit dem Wachsen oder Abnehmen des Winkels γ gleichfalls resp. wächst oder abnimmt; und umgekehrt.

21. Will man nun ein Dreieck aus seinen drei Seiten construiren, so muß vor allen Dingen nachgesehen werden, ob, indem man zwei von diesen drei Seiten als beliebige gelten läßt, die dritte auch wirklich zwischen den durch die vorhergehende Betrachtung festgestellten Grenzen enthalten sei. In diesem Falle läßt die Möglichkeit der Construction sich ohne Mühe nachweisen. Führt man aber die Construction in zwei Exemplaren aus, so zeigt man auch leicht, vermöge des Schlußsatzes der vorhergehenden Entwickelung, die Congruenz der beiden resultirenden Dreiecke; folglich sind durch die gegebenen drei Seiten eines Dreiecks auch die nicht gegebenen Bestandtheile desselben, also seine drei Winkel, vollständig bestimmt.

22. Durch den hier zuletzt behandelten Fall hat die Construction des Dreiecks aus je anderen und anderen Bestandtheilen von selbst ihren Abschluß gefunden, und ein Rückblick lehrt, daß die Construction eines Dreiecks nicht nur möglich, sondern daß sie auch bestimmt ist (d. h. daß je zwei aus denselben Elementen hervorgegangene Dreiecke congruent sind), wenn zur Herstellung desselben gegeben werden:

1) Eine Seite und die beiden anliegenden Winkel (Bedingung: Die Summe der beiden letzteren muß kleiner als 2 R sein).

2) Eine Seite nebst einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel (Bedingung wie vorhin).

3) Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel.

4) Zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel (Bedingung: der Winkel darf nicht der kleineren Seite gegenüberliegen).

5) Drei Seiten (Bedingung: die Summe zweier Seiten muß größer und ihr Unterschied muß kleiner sein als die dritte Seite).

Wenn es sich nur um die Congruenz zweier Dreiecke handelt, also die Dreiecke schon als vorhanden vorausgesetzt werden, so fallen die Bedingungen in 1. 2. und 5. von selbst aus, und nur diejenige in 4. bleibt stehen.

Als ein Beispiel mag das Gegebene genügen. Man wird ohne Mühe erkennen, daß es hier nicht meine Absicht gewesen ist ein Stück Lehrbuch zu liefern; das Lehrbuch, so wie auch der Unterricht, hätte vielmehr den Stoff weiter auseinander zu legen, sowie die Stufen schärfer zu markiren, so daß das Vorstehende leicht die Beschäftigung eines vollen Vierteljahrs, bei wöchentlich 4 Stunden, würde ausmachen können. Dagegen habe ich hier vorzugsweise nur auf die Art des von Stufe zu Stufe weiterführenden Entwickelungsganges, so wie derselbe aus dem vorangestellten Principe hervorfließt, den Nachdruck legen wollen, wobei es denn allerdings, da ich dies hier zum ersten Male niederschreibe, dahin gestellt bleiben muß, ob ich überall auch das Richtige getroffen habe. Der Leser mache es besser!

Dritter Artikel.

Um das Bild zu vervollständigen und abzurunden, welches ich bis hieher von der Methode des mathematischen Unterrichts zu geben versucht habe, glaube ich jetzt noch einmal ausführlicher auf einen Punkt zurückkommen zu müssen, der oben nur nebenher berührt werden konnte. Es ist dies der einem jeden wissenschaftlichen Unterrichte in der Mathematik nothwendig voraufzuschickende vorbereitende Cursus. Da ein solcher Cursus zur Zeit noch keineswegs allgemein eingeführt ist, so wird es immerhin der Mühe werth sein, hier noch einmal die Gründe zusammenzustellen, die ihn fordern, so wie die Art und Weise zu erörtern, wie er ausgeführt werden kann.

Es ist bekannt, wie aus den mangelhaften Leistungen des vormaligen mathematischen Unterrichts die Meinung hervorgegangen war, es gebe eine bestimmte Anlage für Mathematik, die nur wenigen beschieden sei, und diese wenigen seien eben diejenigen, bei denen der Unterricht den gewünschten Erfolg brachte. Fand doch darin der Lehrer einigen Trost für die Mühe und den Eifer, welche er auf die Lehrstunden verwandt hatte. Glücklicher Weise darf aber diese Meinung, wenn gleich sie in dem großen nichtpädagogischen Publicum noch immer an der Tagesordnung ist, bei den Fachmännern gegenwärtig zu den veralteten gerechnet werden, denn es haben Stimmen genug sich erhoben, um das Uebel in seinem wahren Ursprunge erkennen zu lassen. Der Schüler, welcher in eine neue Disciplin eingeführt werden soll, bringt immer schon einen gewissen Vorrath von Kenntnissen mit, die in irgend welcher, wenn auch lockern

Beziehung zu der neuen Disciplin stehen. Aus diesem Vorrathe das Brauchbare auszusuchen und ans Licht zu ziehen und daraus einen Boden zu bereiten, auf welchem man nach und nach zu neuen Gegenständen hingelangen kann, immer Sorge tragend, daß unter den neu erworbenen Kenntnissen die engste Verknüpfung, sowohl mit einander als mit dem früher vorhandenen Wissen sich herstelle: das ist der Weg, welchen die Psychologie dem Lehrer vorschreibt, der des Erfolgs gewiß sein will. Denn solcher Unterrichtsweise folgen die Schüler mit Lust, und das Interesse fehlt immer nur da, wo die Schüler mit unbekannten und unvorbereiteten Dingen plötzlich überschüttet werden, so daß ein mangelndes Interesse stets als der sicherste Beweis davon anzusehen ist, daß von Seiten des Lehrers ein Fehler begangen war. Dieser Fehler aber ist leicht zu erkennen und nachzuweisen, wenn man von dem Gesagten speciell die Anwendung auf Mathematik macht. Was bei dem eintretenden Schüler Brauchbares für den mathematischen Unterricht vorgefunden wird, das beschränkt sich in der Regel nur auf mehr oder weniger rohe Begriffe von geraden und krummen Linien, von Figuren, die aus Linien zusammengesetzt sind und, wenn es hoch kommt, von Körperräumen (für die Geometrie), und daneben auf minder rohe, schon durch den gewöhnlichen Rechenunterricht geläuterte Begriffe von Zahlen und Zahlenoperationen (für die Arithmetik). Die Mathematik selbst aber bedarf scharfbestimmter Begriffe, ja sie operirt sofort mit diesen Begriffen, construirt neue, u. s. f., so daß der Schüler, wenn nicht der Unterricht ermüdend langsam fortschreiten soll, sehr bald den Faden verlieren wird, weil ihm nicht Zeit gegeben ist, sich die Begriffe, bevor es zu deren Anwendung geht, geläufig zu machen. Dazu kommt, daß die Mathematik schon in ihren ersten Anfängen es mit höchst abstracten Begriffen zu thun hat, während die Begriffe, welche

der Schüler mitbringt, wenig mehr als Individual-Vorstellungen sind, mithin ein Unterricht, welcher ihm die Mathematik selbst bringt, in der Sphäre jener Begriffe unfehlbar nicht einmal von ihm verstanden werden wird. Nur die wenigen, welche besser vorbereitet sind, werden dem Unterricht zu folgen vermögen, und eben diese sind es, denen man sonst die sogenannte „Anlage" für Mathematik beilegte. Dieses alles aber führt zu dem Resultate, daß mit Schülern, so wie sie in der Regel die Schule bietet, niemals unmittelbar der eigentliche mathematische Unterricht begonnen werden darf, sondern daß im Gegentheil hiezu erst ein vorbereitender Unterricht erforderlich wird, eine Brücke, welche von dem Vorstellungskreise des Schülers zu der Wissenschaft hinüberführt. Wie diese anzulegen und aus welchem Material sie zu construiren sei, davon soll hier die Rede sein.

Wenn man sich die so eben bezeichnete Schwierigkeit genau vergegenwärtigt, welche dem Schüler bei dem ersten mathematischen Unterricht entgegentritt, so muß sofort klar werden, daß diese Schwierigkeit wesentlich darauf hinauskommt, daß dem Schüler zweierlei zugleich zugemuthet wird; nämlich erstens sich mit neuen Gegenständen bekannt zu machen, und zweitens an diesen Gegenständen dadurch, daß man mit ihnen operirt, Eigenschaften aufzufinden. Oder, wie Herbart die Sache ausdrückt, daß man demonstriren will, wo noch keine mathematische Phantasie geweckt worden ist. Nun aber kann die Erkenntniß eines Gegenstandes nach seinen verschiedenen Eigenschaften (die Demonstration) erst dann zur Ausführung kommen, wenn zuvor von demjenigen Gesammtgebiete, welchem dieser Gegenstand angehört, ein Begriff nicht nur erfaßt, sondern auch zu einem disponibeln Eigenthume geworden ist, und daraus ergiebt sich sofort die Folgerung, daß die Schwierigkeit des ersten mathematischen Unterrichts wegfallen wird, wenn man das Nebeneinander

der obengenannten beiden Seelenthätigkeiten in ein Nach-einander umwandelt. Also zuerst sollen dem Schüler die mathematischen Objecte vorgeführt werden, damit er sie anschaue, vergleiche und so zu einem klaren Begriffe derselben gelange; nachher erst soll er diese Objecte denjenigen Operationen unterwerfen, welche die Natur dieser Objecte selbst fordert. Letzteres ist nun aber das eigentliche Geschäft der Mathematik, mithin — und das war das Ziel dieser Deduction — wird die zuerst genannte Thätigkeit dem vorbereitenden mathematischen Unterrichte anheimfallen müssen. Hiemit ist also der Inhalt dieses vorbereitenden Unterrichts festgestellt.

Aber auch der Umfang der nöthigen Vorbereitung läßt sich sogleich hieraus erkennen. Die genannte Schwierigkeit findet nämlich nur bei dem ersten mathematischen Unterrichte statt, da alle Begriffe, welche die späteren Theile bringen, nach bestimmten Vorschriften aus frühern Begriffen construirt und deshalb leichter zur Geläufigkeit gebracht werden. Es wird also nur nöthig sein, die ersten Elemente der Mathematik bis zu einer gewissen Grenze hin zu durchlaufen, um alle diejenigen Objecte aufzufinden, deren Kenntnißnahme für den vorbereitenden Unterricht zweckmäßig sein kann.

Indem hiemit Inhalt und Umfang des vorbereitenden Unterrichts gegeben sind, würde weiter zu untersuchen sein, wie die Erkenntniß der betreffenden Objecte, in der hier erforderlichen Weise, dem schon vorhandenen Vorstellungskreise des Schülers zweckmäßig angeknüpft werden und wie sie von hieraus sicher fortschreiten könne. Darüber läßt sich wesentlich zweierlei sagen. Der Schüler hat schon geometrische Gestalten in Menge wahrgenommen; Rechtecke zeigen ihm Fenster und Thüren, Dreiecke Dachgiebel, Kreise Sonne und Mond; ferner kommen Zahlen täglich bei seinen Spielen vor, und selbst von dekadischen Zahlen und von Brüchen bringt er, wenn auch noch unvollständige Begriffe

von der Elementarschule mit. Diese Basis aber ist breit genug, und der Unterricht hat nur sofort dieser bekannten Gegenstände sich zu bemächtigen und sie den Schülern lebhaft vorzuführen. Also nicht etwa — recht systematisch! — von Punkten ausgegangen und von da zu geraden und krummen Linien ꝛc. ꝛc. fortgeschritten, oder mit der Operation des Zählens begonnen um den Begriff der Zahl entstehen zu lassen (denn das wäre für diesen Standpunkt viel zu abstract), sondern sofort ein Dreieck oder einen Kreis an die Tafel gezeichnet, eine Multiplication sechszifferiger Zahlen ausgeführt, so daß man sogleich mitten in der Sache steht.

Zugleich aber (dies ist der zweite Punkt) muß der Schüler selbst Hand anlegen, und hier namentlich trete ich in Widerspruch mit den sonst wohl vorgeschlagenen Mitteln zur Ausführung des vorbereitenden Unterrichts. Es bedarf gegenwärtig wohl kaum noch der Nachweisung, wie unglücklich der Gedanke war, mit einem Schüler von dem hier vorausgesetzten Standpunkte logische Uebungen zur Vorbereitung der Mathematik anzustellen. Man vergaß, daß die Logik, wenn gleich logisch das Erste, dennoch psychologisch und folglich auch pädagogisch nur das Letzte sein kann, zu welchem der sich ausbildende Geist gelangt, und daß mithin logische Uebungen an Gegenständen der Mathematik entweder selbst schon Mathematik sind, oder gar darüber hinaus, in einem noch abstracteren Gebiete liegen. Man kann den Bildungsgang eines Schülers, der mit den concretesten Vorstellungen in die niedrigste Klasse des Gymnasiums eintritt und von da die übrigen Klassen nach und nach durchläuft, als denjenigen einer fortwährenden Abstraction bezeichnen, die in ihm in Folge des Unterrichts zu Stande kommt; aber selbst der Primaner, auf der höchsten Stufe dieser Abstraction stehend, wird kaum schon jenen logischen Uebungen, wenn sie mehr als Spielereien sein sollen, Interesse abgewinnen, d. h. es wird in ihm kaum schon

diejenige geistige Basis vorhanden sein, auf welcher jene Abstractionen mit Erfolg zu Stande kommen können. Doch lassen wir diesen Irrweg, der in einer fehlerhaften Anwendung der Philosophie Kant's seine Wurzeln hat, und suchen in der Nähe was hier Noth thut.

Der Schüler soll also selbst Hand anlegen, selbst schaffen, und dazu bieten sich in der That namentlich für die Geometrie Hülfsmittel, wie sie nicht leicht irgend eine andere Schuldisciplin, wenigstens für das Knabenalter, aufweisen kann. Diese Hülfsmittel bestehen in den Zeichenapparaten, die man in den sogenannten Reißzeugen beisammen findet, nämlich einem Zirkel, der mit der Vorrichtung zum Kreisziehen versehen werden kann, zwei Linealen, von denen das eine die Gestalt eines rechtwinkligen Dreiecks hat, und einem Bleistift; ein Transporteur kann auch vielleicht gute Dienste leisten, dagegen bleiben Reißfedern und überhaupt der Gebrauch von Dinte oder Tusche — wenigstens vorläufig — am besten ausgeschlossen. Es versteht sich, daß die entsprechenden Apparate auch im großen Maßstabe für den Gebrauch an der Schultafel vorhanden sein müssen. Mit diesen Apparaten lernt der Schüler zeichnen, und die Genauigkeit der Zeichnung wird hier eben so streng gefordert wie die Richtigkeit des Resultats einer Rechnung. Dadurch macht sich der Schüler inniger, als es auf jede andere Weise möglich wäre, vertraut mit den geometrischen Gebilden, die man ihm vorlegt, und außerdem gewinnt er nebenbei die für den spätern wissenschaftlichen Unterricht gar nicht zu verachtende Fähigkeit, eine Figur exact auszuführen. Ja er lernt dieses mit leichter Mühe, denn welcher Trieb zum Zeichnen in dem Knaben wohnt, davon legen ja die Schulbänke und Schulhefte hinreichend Zeugniß ab. Die Vorbereitungen zur Arithmetik entbehren eines solchen innern Antriebes; die Selbstthätigkeit des Schülers, die hier allein auf

das Rechnen sich beschränkt, liefert keine so augenfälligen Resultate.

Hiemit habe ich einen, wie ich glaube vollständigen Begriff von denjenigen Principien gegeben, nach welchen ich einst vor einer Klasse von 11—13 jährigen Schülern (der mathematische Unterricht begann in der nächsthöheren Klasse) den vorbereitenden mathematischen Unterricht geleitet habe. Da „aus diesem Begriffe aber der Begriff von der Ausübung und dem nothwendigen Erfolge, ohne alles Probiren, sich von selbst ergiebt;“ *) so könnte ich hier abbrechen und das vorstehend Gesagte der billigen Beurtheilung sachverständiger Pädagogen anheimgeben. Doch möge es mir gestattet sein, hier zum wenigsten noch einige Einzelheiten namhaft zu machen, die sich mir in der Ausübung als zweckmäßig herausgestellt haben. Ich würde gern den Versuch machen einen Leitfaden oder auch nur eine Aufgabensammlung für den vorliegenden Zweck zusammenzustellen, wenn ich mir nicht zu gut bewußt wäre, daß solches nur mitten im thätigen Leben auf die rechte Weise geschehen kann, da ja bekanntlich die besten Gedanken und die glücklichsten Einfälle während des Unterrichtens selbst kommen. Gegenwärtig schreibe ich nur aus der Erinnerung.

1. Vorübungen zur Arithmetik.

Was die Gymnasien seither als Vorbereitung zum mathematischen Unterricht zu geben pflegen, das beschränkt sich fast überall auf die Rechenstunden, die nach altem Herkommen schon darum ihren Platz finden, weil man im praktischen Leben will rechnen können. Diesen Gesichtspunkt, der ohnehin zu dem Zwecke der Gymnasien nicht stimmt, **) möge man fallen lassen und

*) Fichte's Reden an die deutsche Nation. Neunte Rede.

**) Es ist dies der Gesichtspunkt der Volksschulen. Dem Gymnasialschüler dagegen ist in der Mathematik ein viel besseres Mittel geboten, selbst ohne daß es beabsichtigt wird, sich in den Rechnungsfragen des praktischen Lebens zu orientiren.

dafür den andern, Vorbereitung zur wissenschaftlichen Arithmetik, an die Stelle setzen, so können die Rechenstunden völlig genügen. Also nicht nach eingelernten Regeln und vorgeschriebenen Mechanismen, wie leider so oft, soll man rechnen lassen, sondern die Regeln aus der jedesmaligen Aufgabe hervorholen, ja sie in größter Mannigfaltigkeit hervorholen, damit nichts Bleibendes, Starres entstehe, sondern des Knaben Aufmerksamkeit nach allen Seiten hin rege erhalten werde. Damit werden also Regula de tri nebst Regula de quinque, Kettenregel, und wie diese Dinge sonst heißen mögen, in ihren mittelalterlichen Formen mit Strichen, Haken und Fragezeichen über den Haufen geworfen, und zugleich verschwindet die Grenze, welche der Pedantismus zwischen Tafelrechnen und Kopfrechnen gezogen hat, während das Niederschreiben jetzt nur den Zweck behält, festzuhalten was die Knaben nicht im Kopfe festhalten können.

Solcher Behandlung unterworfen zu werden, dazu eignet sich nun vorzüglich die Auflösung von Aufgaben, welche auf Gleichungen führen, durch Räsonnement, und dies ist der Faden, an welchen ich selbst — nachdem, wie zu erwarten, einige Fehlgriffe vorangegangen waren — den vorbereitenden Unterricht zur Arithmetik fortlaufend geknüpft habe. Hiemit erreiche ich zuerst ein Klarwerden des Begriffs von einer Gleichung; die unbekannte Zahl wird durch einen Buchstaben bezeichnet und die Gleichung auf bekannte Weise niedergeschrieben. Mit dieser Gleichung wird sodann aber nicht auf die bekannte mechanische Weise operirt, sondern sie dient nur als sichtbarer Ausgangspunkt für das daran zu knüpfende Räsonnement, durch welches ich zweitens Geläufigkeit in den Begriffen der vier ersten Rechnungsarten bezwecke. Die Aufgaben können im Anfange nicht zu einfach sein, etwa: „Eine Zahl zu finden, deren sechster Theil 4 ist," oder: „Das Siebenfache des dritten Theils einer

gesuchten Zahl ist 28," u. dgl. und es muß mehr Gewicht auf den richtigen Gang der Lösung als auf die Richtigkeit des Resultats gelegt werden: wenigstens bei Schülern wie den meinigen, die bis dahin nur Mechanismen zu üben gewohnt waren. Mir ist vorgekommen, daß meine Schüler über der Aufgabe: „Eine Zahl zu finden, welche doppelt so groß ist als ihre Hälfte," sich sehr ernsthaft den Kopf zerbrachen; einer sogar brachte als Resultat die Reihe der Zahlen 2, 4, 8 ꝛc., wobei nicht schwer zu erkennen ist, was ihm dabei dunkel vorschwebte. Mit welchem Erfolge hätte man wohl solchen Schülern die Mathematik selbst vortragen können!

Ein natürlicher Fortschritt, immer an dem Faden der genannten Aufgaben haftend, führt von hieraus einerseits zu den negativen Zahlen und andererseits zu den Brüchen, an welche weiter (ich übergehe die Details) mit Vortheil die Decimalbrüche sich lehnen lassen, deren geläufige Kenntniß für die späteren Theile der Mathematik von so großer Wichtigkeit ist. Daneben gleichzeitig sind fortlaufend auch Rechnungen mit Buchstaben auszuführen, und zwar so, daß man abwechselnd mit Buchstaben und mit bestimmten Zahlen operirt, wobei es zugleich von größerer Wichtigkeit wird den Aufgaben Einkleidungen zu geben, also z. B. von a Fuß und b Pfund zu sprechen, damit den Schülern die wahre Bedeutung der Buchstaben klar entgegentritt. Es kann keine Schwierigkeit haben schon auf dieser Stufe ein erhebliches Stück Buchstabenrechnung — nämlich mit Ausschluß der Potenzen — zu tractiren. Von Lehrsätzen, oder gar von Beweisen zu reden, ist aber da niemals der Ort.

Bis hieher bin ich selbst gelangt. Hinzufügen will ich nur noch, daß es mir zweckmäßig, wo nicht nothwendig scheint, auch die Erhebung zum Quadrat und die Ausziehung der Quadratwurzel an dekadischen Zahlen in den Cursus hineinzuziehen, und

damit sodann die Vorübungen abzuschließen. Nebenher können vielleicht noch combinatorische Operationen empfehlenswerth sein. Doch darüber enthalte ich mich des weiteren Urtheils.

2. Vorübungen zur Geometrie.

Die thatsächlich vorhandene Lust des Knaben am Zeichnen bemächtigt sich gern solcher Hülfsmittel, die eine Mannigfaltigkeit an Formen zulassen, und dahin gehört unter den oben genannten Zeichenapparaten namentlich der Zirkel. Man kann sicher sein, daß beim Beginn der ersten Lehrstunde unter je zehn Knaben neun schon mit Kreisconstructionen beschäftigt sind. Diesem Winke muß man folgen und gleichfalls sogleich einen Kreis an die Tafel zeichnen; dabei kann man einige Namen nennen (Halbmesser, Umfang rc.), und nun steht das Feld offen zum Weitergehen. Wie ich hiebei verfahren bin, davon will ich eine kurze Uebersicht geben.

Ich construirte aus einem Punkte der Peripherie jenes Kreises, als Mittelpunkt, mit gleichem Radius einen zweiten Kreis, wodurch ein gleichseitiges Dreieck zu Stande kam, welches ich durch gerade Linien sichtbar machte. Bei der Nachweisung der Gleichheit der drei Seiten des Dreiecks wurde noch ein dritter Kreis, aus dem dritten Eckpunkte des Dreiecks, hinzugefügt. Aber die Figur enthielt jetzt noch drei gleichseitige Dreiecke, welche durch Zuziehung der noch nicht berücksichtigten Durchschnittspunkte der Kreise zu Stande kamen, und diese gaben, ausgeführt, mit dem anfänglichen Dreiecke ein großes ebenfalls gleichseitiges Dreieck, dessen Seitenlänge das Doppelte der anfänglichen Seitenlänge betrug. Das waren gleichseitige Dreiecke genug für eine Lehrstunde.

Damit nun aber die Knaben, die der Construction auf dem Papiere gefolgt waren, an ihrer Figur etwas Greifbares hatten,

forderte ich sie zuletzt auf, mit ihren Messern (ein so höchst brauchbares Instrument führt ein Knabe stets bei sich) die Figur nach deren geradlinigem Umfange auszuschneiden und, wie ich es vorzeigte, einzubiegen, und mit nicht geringer Freude sah jeder sein Tetraeder vor sich stehen. Ich suchte dabei an die Aegyptischen Pyramiden und an Thurmspitzen zu erinnern, aber die Knaben redeten lieber von Schilderhäusern und Vorraths-kasten, indem sie sich die eine Klappe als disponibel zum Oeffnen und Schließen vorbehielten. Ich brauche nicht hinzuzufügen, daß die Zahl der Tetraeder sich schnell vervielfältigte und daß mir in der folgenden Stunde dergleichen sorgfältig aus Pappe angefertigt mitgebracht wurden.

Im Laufe des Cursus habe ich der Polyeder nach und nach mancherlei anfertigen lassen, und es war jedesmal ein Fest, wenn es wieder einen „Körper" zu zeichnen gab. Der Zweck dabei war offenbar, ein empirisches Mittel zur Prüfung der genauen Zeichnung in Händen zu haben, indem die verschiedenen Polygonseiten genau zusammenschließen mußten (denn Papparbeiter wollte ich nicht bilden); deshalb durfte auch niemals das Netz zusammengeklebt werden. Wer dies dennoch thun wollte, der mußte ein zweites Exemplar anfertigen, und das kam häufig genug vor; ich verwahre noch eine Anzahl solcher Polyeder, zum Theil elegant ausgeführt, die mir nach und nach zum Geschenk gemacht worden sind. Dem Leser glaube ich hierin einen Beweis a posteriori davon vorgelegt zu haben, daß mein Weg ein pädagogisch richtiger war.

An das gleichseitige Dreieck knüpft sich in natürlicher Folge das gleichschenklige Dreieck, welches ich über einerlei Basis mit dem ersteren, sowohl in größerer als in geringerer Höhe, selbst auch unterhalb der Basis, construire. Hier aber tritt sogleich eine Thatsache hinzu, nämlich die Spitzen aller dieser Dreiecke

liegen in einer geraden Linie, die zugleich die Basis halbirt; und es entsteht die Frage, wie man den Schüler zur Erkenntniß dieser und ähnlicher Thatsachen führen will, ohne seinen Glauben in Anspruch zu nehmen.

Verkehrt würde es sein (was in noch höherem Grade beim Vortrage der Mathematik selbst verkehrt ist), die Thatsache zu nennen und den Beweis für spätere Zeiten zu versprechen; damit würde das Denken getödtet und deshalb soll ein Lehrer, der einen Satz gebraucht, während er dessen Beweis an der Stelle noch für zu schwer hält, hierin die Weisung sehen, daß sein Lehrplan der Aenderung bedarf. Aber nicht minder verkehrt wäre es, den Beweis zu geben und damit die Grenze, welche zwischen den Vorübungen und der eigentlichen Geometrie gezogen worden ist, wieder zu verwischen. „Der Werth strenger Beweise wird nur dann erst vollständig erkannt, wenn man in der Sphäre von Begriffen, wohin sie gehören, schon einheimisch ist,“ *) und dieses eben ist hier noch nicht im geringsten der Fall. — Das Auskunftsmittel ist leicht. Es giebt eine beträchtliche Gruppe von geometrischen Thatsachen, welche sich vermittelst des Satzes vom zureichenden Grunde beweisen lassen, und diese, aber auch nur diese Thatsachen sind es, welche in den Vorübungen zur Sprache kommen können. Der obige Satz gehört aber zu dieser Gruppe, und der Lehrer wird mithin, nach Anleitung des Satzes vom zureichenden Grunde, durch zweckmäßige Fragen den Schüler zu der Einsicht zu leiten haben, inwiefern in der Anlegung der Figur kein Grund vorhanden sei, weshalb ein anderer Erfolg, als der ausgesprochene, eintreten könne. Ein Mißgriff würde es sein, wenn man den Schüler auf jene Beweisform sorgfältig aufmerksam machen oder gar sie zu einer stereotypen Formel stempeln

*) Herbart's Umriß pädagogischer Vorlesungen.

wollte; genug wenn in dem Schüler, ihm selbst unbewußt und nur dem Lehrer sichtbar, der richtige Denkproceß vor sich geht.

Von hier an kann ich kürzer sein. An dem ungleichseitigen Dreiecke haben die Schüler wenig Gefallen und man kann es, da obendrein auf dieser Stufe nichts darüber zu sagen ist, füglich übergehen. Nur das rechtwinklige Dreieck, so wie der Begriff des Perpendikels, folgen unmittelbar aus den vorhergehenden Betrachtungen über das gleichschenklige Dreieck. Daran lehnen sich sodann das Quadrat, so wie das Rechteck überhaupt, wobei zugleich die mechanischen Manipulationen mit dem hölzernen rechtwinkligen Dreiecke zur Construction von Perpendikeln und Parallellinien gezeigt werden können.

Ist der Schüler bis hieher gekommen, so wird es an der Zeit sein vom Winkel zu reden, denn die für diesen Begriff nöthige Abstraction kann jetzt keine Schwierigkeit mehr haben. Es liegt darin Stoff für mancherlei Uebungen, deren Schluß die Construction regelmäßiger Polygone ausmachen kann. Hieran lassen sich zugleich mancherlei Polyeder knüpfen, wie auch die Herleitung von Polyedern aus einander durch Abstumpfung der Ecken oder dergl.; die Betrachtung der Netze dieser Polyeder giebt eine sehr instructive Uebung ab.

Dem hier angegebenen Stoffe möchte ich nun gern noch beifügen: Construction und Gebrauch des verjüngten Maßstabes, empirische Kenntnißnahme von der Länge der Kreisperipherie, und endlich Betrachtung der Flächenräume im Zusammenhange mit der Verwandlung der Figuren. In der Ausübung bin ich selbst aber nicht mehr dahin gelangt und ich versage mir deshalb weitere Vorschläge.

